

JOI 2020/2021 二次予選

問題4 安全点検

解説: 戸高 空 (nxteru)

問題概要

- ・数直線上の座標0に K 人の大工がいる
- ・ N 箇所の施設 = 座標 $A_i (> 0)$ に B_i 個のタスクがある
- ・大工は1分間で次のどちらかの行動ができる
 - ・座標を1だけ移動する
 - ・今いる座標にあるタスクを1個完了する
- ・すべてのタスクを完了するのに最短で何分かかかるか？

小課題1 (3点)

- $K = 1$
- 大工は1人しかいない
- 座標の小さい施設から順番にタスクを完了していく
- $A_N + \sum B_i$ を出力すればよい

小課題2(15点)

- ・ $K = 2$
- ・大工が2人になった
- ・大工の最適な行動の仕方を考察する

小課題2(15点)

- ・行動は「移動」と「タスク」の2種類ある
- ・「移動」によってより遠くにある「タスク」も行えるようになる
- ・「移動」にたくさん時間を使った人はできるだけ遠くの「タスク」をした方がいいのではないか？

小課題2(15点)

- ・2人のどちらかは座標 A_N まで行く必要がある
- ・その人はより座標の大きなタスクを行い、もう1人が移動に時間を使わなくて済むように行動するのが最適
- ・最適な行動ではある施設 x が存在して
 - ・座標 A_x 以下のタスクのみ行う
 - ・座標 A_x 以上のタスクのみ行うのように2人がそれぞれ行動する

小課題2(15点)

- ・ x を決めてみる
- ・施設 x でのタスクの配分が問題
- ・かかる時間は2人うち大きい方だから2人の行動時間が同じくらいになるように配分するといいい

小課題2(15点)

・前半の人の配分を y とするとかかる時間は

$\max(A_x + \sum_{i < x} B_i + y, A_N + \sum_{i > x} B_i + (B_x - y))$ より

$L = A_x + \sum_{i < x} B_i, R = A_N + \sum_{i > x} B_i$ として

$$L + y = R + (B_x - y)$$

$$y = (R - L + B_x) / 2$$

として求めることができる(ただし y は $[0, B_x]$ の整数にする)

小課題2(15点)

- ・ B の和を計算しておくこと各 x について $O(1)$ で求まる
- ・ x をすべて調べることで $O(N)$ で解ける

小課題3 (82点)

- ・ $K \leq 10^9$
- ・ 終了時間を決めてみる
- ・ つまり T 分でできるかという判定問題を解く
- ・ 「 T 分で完了するためには大工が最小で何人必要か」という問題になる
(必要人数が K 人以下ならできる)

小課題3 (82点)

- ・小課題2の考察より、大工に後ろのタスクから貪欲に配分していくことができる
- ・施設 $i + 1$ 以降を配分し終えて施設 i の配分を決めるとき
- ・施設 i まで移動する人は $T - A_i$ 分タスクに使える
- ・よって新たに $\left\lfloor \frac{B_i}{T - A_i} \right\rfloor$ 人を施設 i まで動員して B_i を配分する
- ・このとき施設 i 担当の最後の1人は時間が余ることがある

小課題3 (82点)

- ・そのような大工の余った時間は施設 $i - 1$ 以下を計算するときに貪欲に配分すればよい
- ・新たに動員する処理の前に余った時間を使い B_i を減らす
- ・こうして余った時間を持ちながら後ろから順に必要な人数を計算していくことができる
- ・ $O(N)$ で判定問題が解けた

小課題3 (82点)

- ・答えは必要な人数が K 人以下であるような最小の T
- ・ T が増えると必要な人数は単調に減っていくので二分探索ができる
- ・ T の範囲は $(A_N, A_N + \sum B]$ でいい
- ・ $O(N \log(\sum B))$ で解ける

余談

答えについて二分探索する問題

これを思いつく方針？

- ・各大工のかかる時間の最大値の最小化と考える
- ・各大工の間で時間を調整するととても大変
 - 終了時間が決まっていると嬉しい