JOI 2021/2022 本選 1 インターカステラー (INTERCASTELLAR)

解説: 平木 康傑

問題概要

- カステラが N ピース並んであり，左から i 個目の長さは A_i
- 偶数のピースを 2 等分する操作を繰り返す
- 操作終了後，左から X_j 個目の長さは？

問題概要

- カステラが N ピース並んであり，左から i 個目の長さは A_i
- 偶数のピースを 2 等分する操作を繰り返す
- 操作終了後，左から X_j 個目の長さは？

14	9	8	12

問題概要

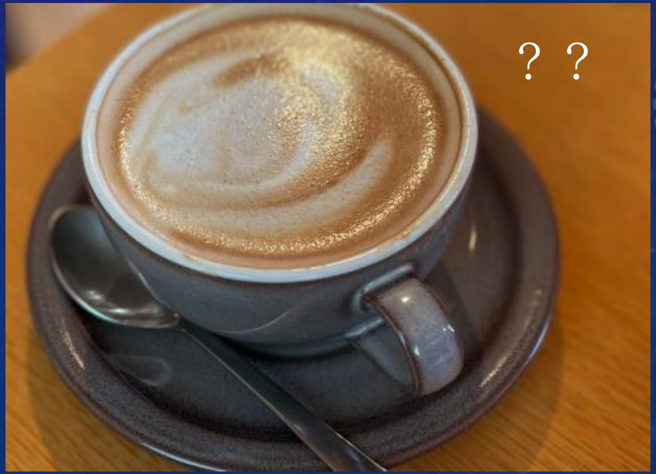
- カステラが N ピース並んであり，左から i 個目の長さは A_i
- 偶数のピースを 2 等分する操作を繰り返す
- 操作終了後，左から X_j 個目の長さは？

14	9	8	6	6

問題概要

- カステラが N ピース並んであり，左から i 個目の長さは A_i
- 偶数のピースを 2 等分する操作を繰り返す
- 操作終了後，左から X_j 個目の長さは？

14	9	8	6	3	3



問題概要

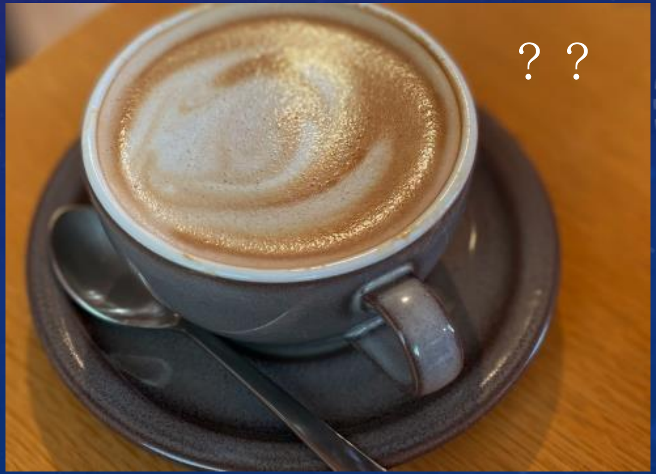
- カステラがＮピース並んであり，左からｉ個目の長さはA_i
- 偶数のピースを２等分する操作を繰り返す
- 操作終了後，左からX_j個目の長さは？

14	9	8	3	3	3	3

問題概要

- カステラが N ピース並んであり，左から i 個目の長さは A_i
- 偶数のピースを 2 等分する操作を繰り返す
- 操作終了後，左から X_j 個目の長さは？

7	7	9	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3



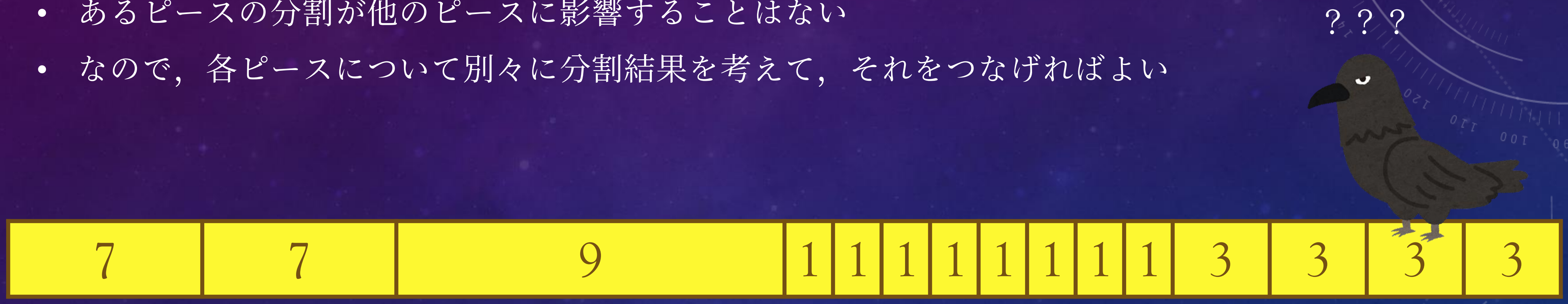
問題概要

- カステラが N ピース並んであり，左から i 個目の長さは A_i
- 偶数のピースを 2 等分する操作を繰り返す
- 操作終了後，左から X_j 個目の長さは？

7	7	9	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3

考察

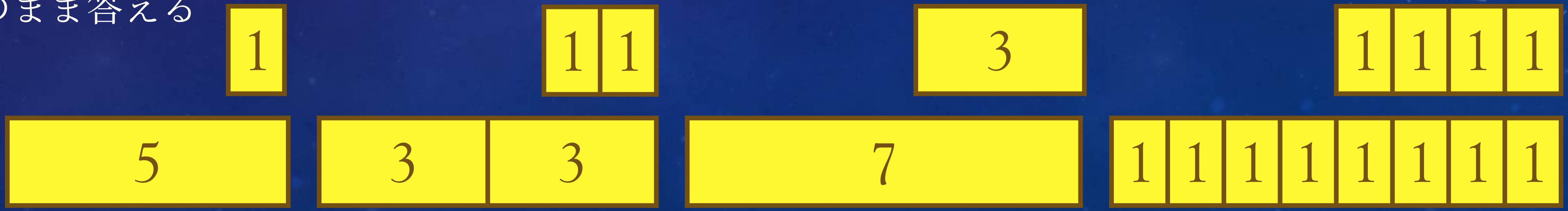
- あるピースの分割が他のピースに影響することはない
- なので，各ピースについて別々に分割結果を考えて，それをつなげればよい



考察 (この時点で小課題 1 は解ける)

- あるピースの分割が他のピースに影響することはない
- なので，各ピースについて別々に分割結果を考えて，それをつなげればよい

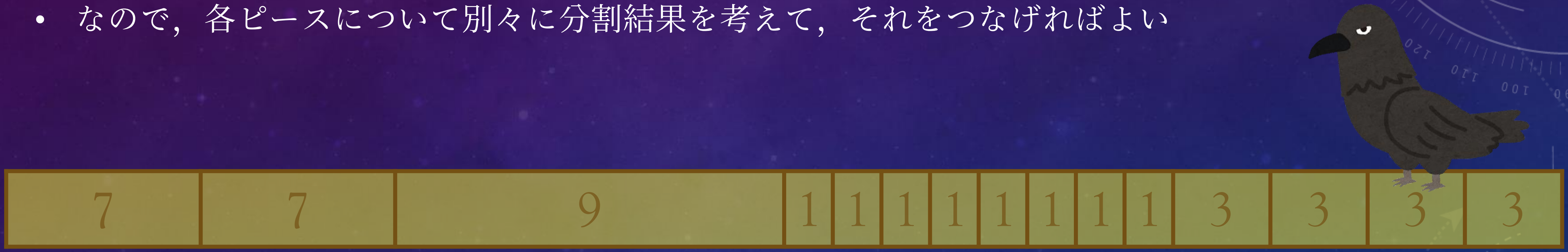
- 小課題 1 ($A_i \leq 8$) は長さに応じた 8 通りの分割を列挙できるので，
  各ピースの分割結果をつなげることで全体の分割結果がそのまま得られる
- 質問にはそのまま答える
- 25 点 GET



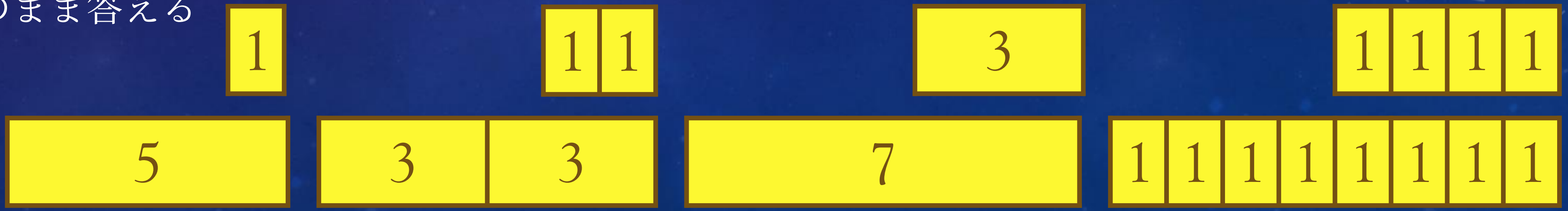
考察 (この時点で小課題 1 は解ける)

- あるピースの分割が他のピースに影響することはない
- なので，各ピースについて別々に分割結果を考えて，それをつなげればよい

カラス



- 小課題 1 ($A_i \leq 8$) は長さに応じた 8 通りの分割を列挙できるので，
  各ピースの分割結果をつなげることで全体の分割結果がそのまま得られる
- 質問にはそのまま答える
- 25 点 GET



ピースの分割結果を見て気付くこと

- 長さ $2^a \cdot b$ (b は奇数)のピースを分割しきると，長さ b のピース 2^a 個になる
  - ↑この数式の意味はこう: 長さを 2 で割れるだけ割ったとき，a は何回割れるか，b は割った後の商
  - たとえば，長さ 120 ($= 2^3 \cdot 15$) のピースを分割しきると長さ 15 のピース 8 ($= 2^3$) 個になる

？？？
微か

$2^3 \cdot$ 奇数

$2^2 \cdot$ 奇数　$2^2 \cdot$ 奇数

$2^1 \cdot$ 奇数　$2^1 \cdot$ 奇数　$2^1 \cdot$ 奇数　$2^1 \cdot$ 奇数

奇数　奇数　奇数　奇数　奇数　奇数　奇数　奇数

ピースの分割結果を見て気付くこと

- 長さ $2^a \cdot b$ (b は奇数)のピースを分割しきると，長さ b のピース 2^a 個になる
  - ↑この数式の意味はこう: 長さを 2 で割れるだけ割ったとき，a は何回割れるか，b は割った後の商
  - たとえば，長さ 120 $(= 2^3 \cdot 15)$ のピースを分割しきると長さ 15 のピース 8 $(= 2^3)$ 個になる

かすか
微か

分割結果の構造を利用して

- 長さ $2^a \cdot b$ (b は奇数)のピースを分割しきると，長さ b のピース 2^a 個になる
- ピースが何個に分割されるかが分かるので，これを利用したい
- 質問で聞かれた位置に来るピースが，N 個のピースのうちどれに由来するものかがわかれば，そのピースの情報から分割後の長さが分かる

7 が 2 個	9 が 1 個	1 が 8 個	3 が 4 個

「左から 5 個目」はここに入るから，1 が答えだな

？？？？？？

分割結果の構造を利用して (これで小課題 2 も解ける)

- 長さ $2^a \cdot b$ (b は奇数)のピースを分割しきると，長さ b のピース 2^a 個になる
- ピースが何個に分割されるかが分かるので，これを利用したい
- 質問で聞かれた位置に来るピースが，N 個のピースのうちどれに由来するものかがわかれば，そのピースの情報から分割後の長さが分かる
- 素直に実装すると: 左から個数を足していって，はじめに X_j を超えたところが求めるピース
    - 各質問に高々 N ステップで答えられるので，小課題 2 ($N \leq 1000, Q \leq 1000$) なら間に合う → 35 点 GET

7 が 2 個	9 が 1 個	1 が 8 個	3 が 4 個

累計 2 個.
足りない…

累計 3 個.
足りない…

累計 11 個.
はじめて 5 以上になった！

「左から 5 個目」はここに入るから，1 が答えだな

？？？？？？

分割結果の構造を利用して (これで小課題 2 も解ける)

- 長さ $2^a \cdot b$ (b は奇数)のピースを分割しきると，長さ b のピース 2^a 個になる
- ピースが何個に分割されるかが分かるので，これを利用したい
- 質問で聞かれた位置に来るピースが，N 個のピースのうちどれに由来するものかがわかれば，そのピースの情報から分割後の長さが分かる
- 素直に実装すると: 左から個数を足していって，はじめに X_j を超えたところが求めるピース
  - 各質問に高々 N ステップで答えられるので，小課題 2 ($N \leq 1000, Q \leq 1000$) なら間に合う → 35 点 GET

7 が 2 個	9 が 1 個	1 が 8 個	3 が 4 個

累計 2 個. 足りない…

累計 3 個. 足りない…

累計 11 個. はじめて 5 以上になった！

「左から 5 個目」はここに入るから，1 が答えだな


カラカラ帝

ムダを削ろう

- 「左から個数を足していって，はじめに X_j 以上になるところはどこ？」という質問に高速に答えたい
- 質問があらかじめ全て分かっているので，X_j の小さい順に答えるとして，前の質問の答えを利用したい
  - 今回は制約で $X_1 \le X_2 \le \cdots \le X_Q$ が保証されているので，並べ替える必要はない

ムダを削ろう

- 「左から個数を足していって，はじめに X_j 以上になるところはどこ？」という質問に高速に答えたい
- 質問があらかじめ全て分かっているので，X_j の小さい順に答えるとして，前の質問の答えを利用したい
- 位置とそこまでの個数の和を記録しながら右に進む方針は小課題 2 と同じ
- いちいち最初から始めず，前の答えとなる位置から出発する

- この図からイメージできる通り，右に進む回数が N ステップで抑えられる
- これで満点が取れました

ムダを削ろう

- 「左から個数を足していって，はじめに X_j 以上になるところはどこ？」という質問に高速に答えたい
- 質問があらかじめ全て分かっているので，X_j の小さい順に答えるとして，前の質問の答えを利用したい
- 位置とそこまでの個数の和を記録しながら右に進む方針は小課題 2 と同じ
- いちいち最初から始めず，前の答えとなる位置から出発する

- この図からイメージできる通り，右に進む回数が N ステップで抑えられる
- これで満点が取れました

解法 2

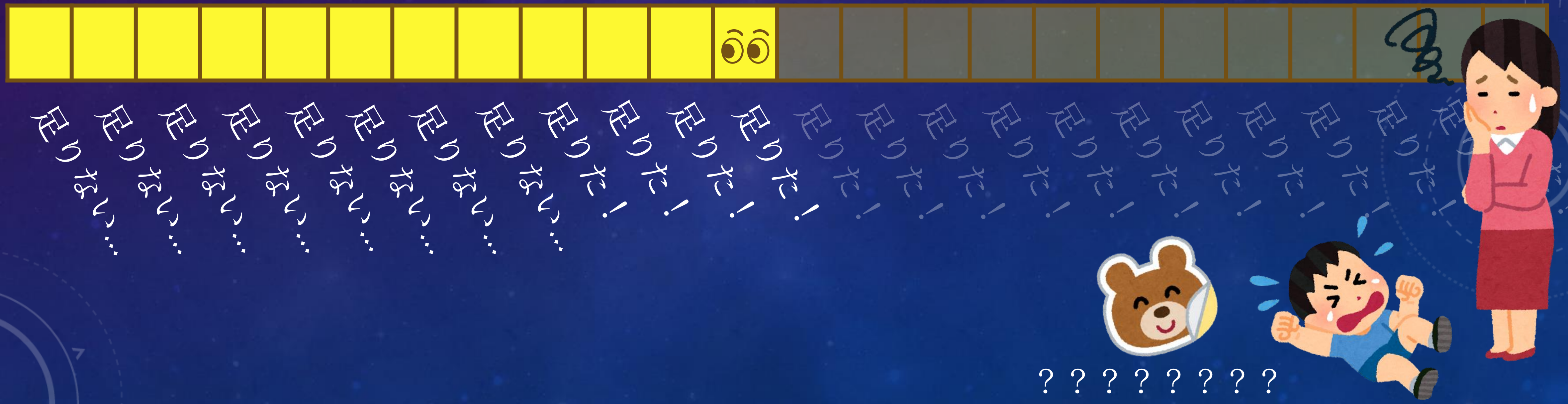
- 「$X_1 \leq X_2 \leq \cdots \leq X_Q$」という保証もなく，1 つ答えないと次の質問を教えてくれない場合はどうだろう？
- 小課題 2 の解法を引き継いだ別の方針で解けるので，そちらも紹介します

単調性

- 「左から個数を足していって，はじめに X_j 以上になるところはどこ？」という質問に高速に答えたい
- 質問をよく観察してみると，どんな数値設定でも下図のような状況になる
- このように，「右に行って悪化することがない」ということを「単調性がある」と呼ぶ

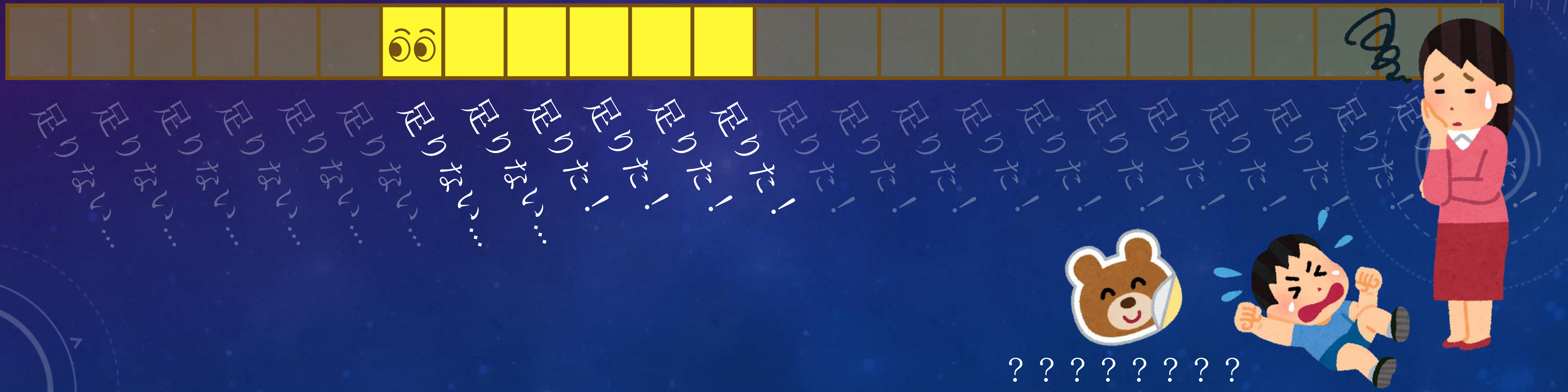
単調性と二分探索

- ド真ん中を見て，そこが「足りた！」ならもうそこより右は見なくていいし，
  そこが「足りない…」ならもうそこより左は見なくていい



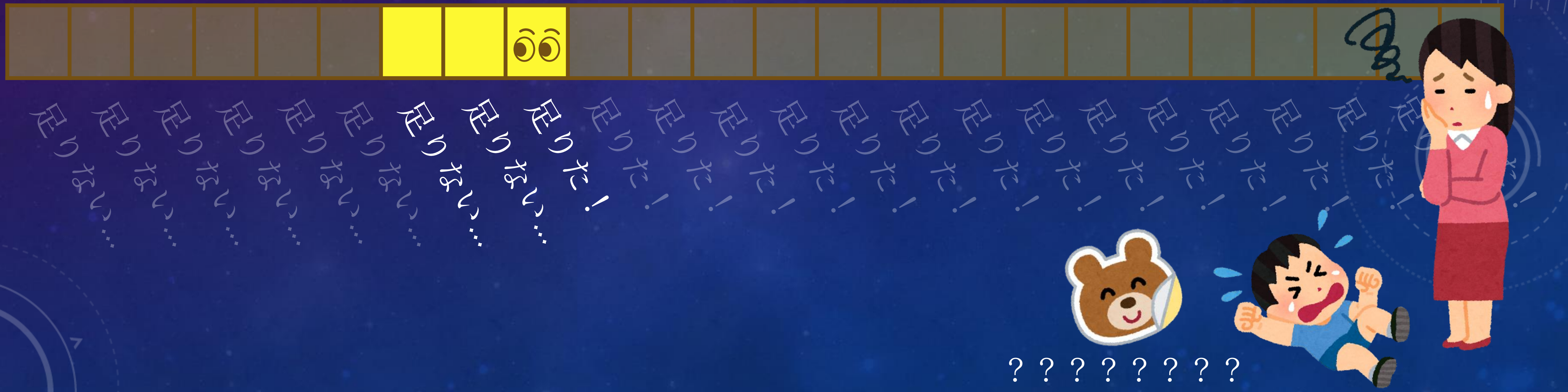
単調性と二分探索

- ド真ん中を見て，そこが「足りた！」ならもうそこより右は見なくていいし，
  そこが「足りない…」ならもうそこより左は見なくていい
- 一度に半分の範囲に絞れるので，非常に高速に($\log N$ 回ほどで)境界の位置が特定できる



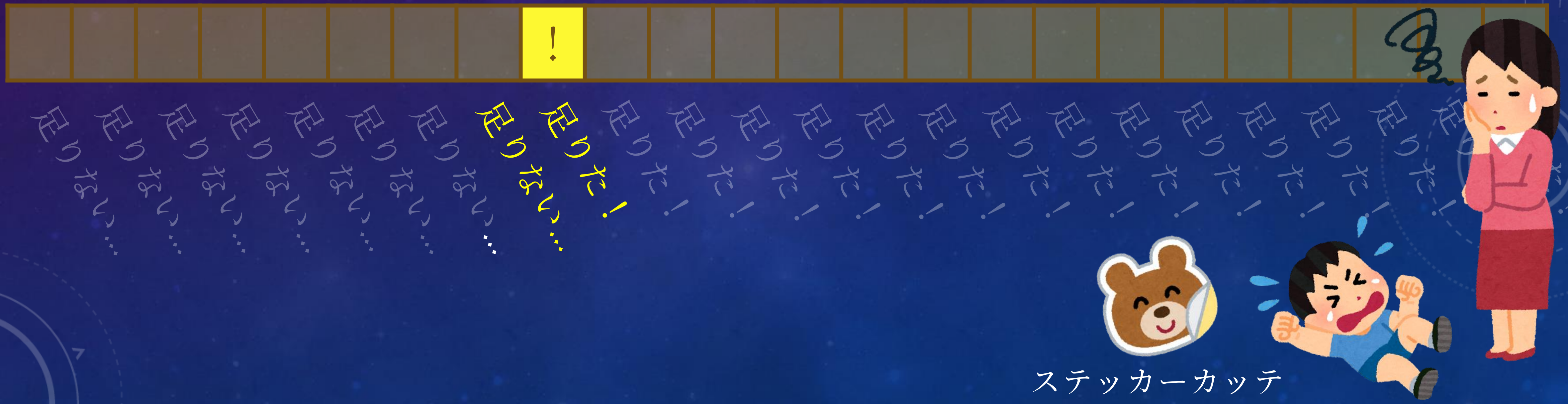
単調性と二分探索

- ド真ん中を見て，そこが「足りた！」ならもうそこより右は見なくていいし，
  そこが「足りない…」ならもうそこより左は見なくていい
- 一度に半分の範囲に絞れるので，非常に高速に($\log N$ 回ほどで)境界の位置が特定できる
- このテクニックは「二分探索」として知られる



単調性と二分探索

- ド真ん中を見て，そこが「足りた！」ならもうそこより右は見なくていいし，
  そこが「足りない…」ならもうそこより左は見なくていい
- 一度に半分の範囲に絞れるので，非常に高速に($\log N$ 回ほどで)境界の位置が特定できる
- このテクニックは「二分探索」として知られる



? ? ? ? ? ? ?
? ? ? ? ? ? ? ?

累積和

- 「左から個数を足していった」結果を各ピースについて保持すれば，それを見て X_j と比べるだけで「足りない」か「足りる」かが判定できる
- この「左から個数を足していった」結果は素直に左から順に計算して記録すればよい

1 個	2 個	1 個	4 個	1 個	1 個	16 個	2 個
累計 1 個	累計 3 個	累計 4 個	累計 8 個	累計 9 個	累計 10 個	累計 26 個	累計 28 個

? ? ? ? ? ? ?
? ? ? ? ? ? ? ?

これで満点が取れました

- 「左から個数を足していった」結果を各ピースについて保持すれば，それを見て X_j と比べるだけで「足りない」か「足りる」かが判定できる
- この「左から個数を足していった」結果は素直に左から順に計算して記録すればよい

1 個	2 個	1 個	4 個	1 個	1 個	16 個	2 個
累計 1 個	累計 3 個	累計 4 個	累計 8 個	累計 9 個	累計 10 個	累計 26 個	累計 28 個

- 累積和に対して「X_j 以上」という条件で二分探索することで，求める位置がどのピース由来かを特定でき，そのピースの分割後の長さが答えとなる
  - 十分高速になり，満点が得られる

空手家テスラ
テラスから落下

これで満点が取れました

- 「左から個数を足していった」結果を各ピースについて保持すれば，それを見て X_j と比べるだけで「足りない」か「足りる」かが判定できる
- この「左から個数を足していった」結果は素直に左から順に計算して記録すればよい

1 個	2 個	1 個	4 個	1 個	1 個	16 個	2 個
累計 1 個	累計 3 個	累計 4 個	累計 8 個	累計 9 個	累計 10 個	累計 26 個	累計 28 個

- 累積和に対して「X_j 以上」という条件で二分探索することで，求める位置がどのピース由来かを特定でき，そのピースの分割後の長さが答えとなる
  - 十分高速になり，満点が得られる

得点分布

$$\frac{2}{3} \div \frac{7}{6} = ¿?$$

- ごちそうさまでした

100点 166人	60点 3人	35点 2人	25点 5人
累計 166人	累計 169人	累計 171人	累計 176人

得点分布

$$\frac{2}{3} \div \frac{7}{6} = \frac{4}{7}$$

- ごちそうさまでした
- お後がよろしいようで

100点 166人	60点 3人	35点 2人	25点 5人
累計 166人	累計 169人	累計 171人	累計 176人