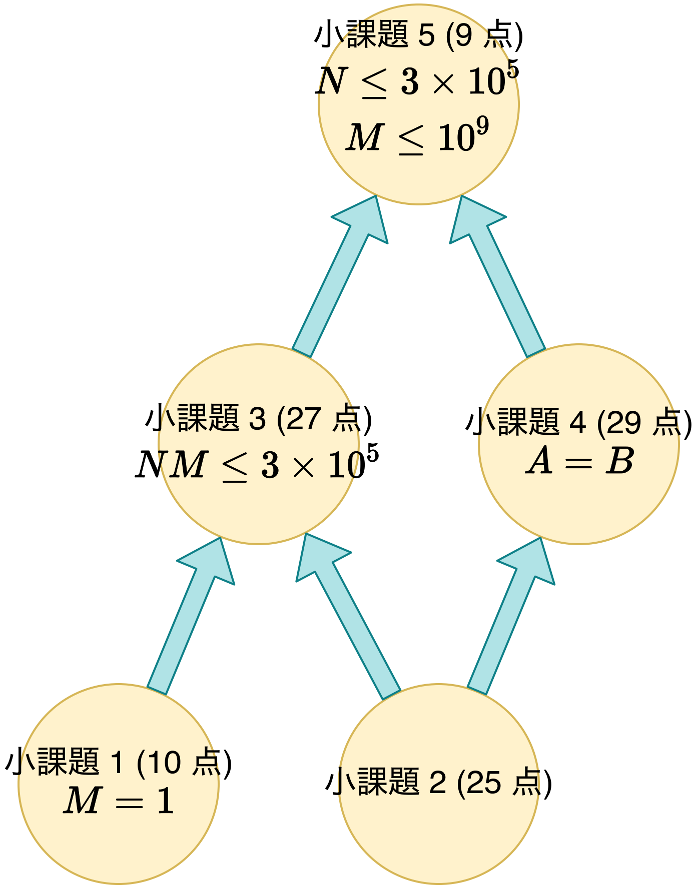
# JOI 2021/2022 本選 問題 2
# 自習 (Self Study) 解説

解説担当 : tatyam

## 問題概要

- $N$ 科目の授業が、科目 $1, 2, \ldots, N, 1, 2, \ldots$ と $N$ 日周期で各科目 $M$ 回行われる。
- 科目 $i$ の授業に $1$ 日出ると、科目 $i$ の理解度が $A_i$ 増える。
- 科目 $i$ の自習を $1$ 日すると、科目 $i$ の理解度が $B_i$ 増える。
- 授業はその日やっている科目しか受けられないが、自習は好きな科目を勉強できる。
- $1$ 日にできる行動は $1$ つまで。
- 理解度の最小値を最大化せよ。

# 小課題



小課題 5 (9 点)
$N \leq 3 \times 10^5$
$M \leq 10^9$
小課題 3 (27 点)
$NM \leq 3 \times 10^5$
小課題 4 (29 点)
$A = B$
小課題 1 (10 点)
$M = 1$
小課題 2 (25 点)

## 小課題 1 (10 点)

- $M = 1$
- $N$ 日間で $N$ 科目の勉強をする。
- 勉強しない科目があれば理解度の最小値は $0$
  → 全ての科目を $1$ 回ずつ勉強する。
  → $i$ 日目に科目 $i$ を勉強する。授業か自習のうち良い方を選ぶ。
- $O(N)$

## 小課題 2 (25 点)

- $NM \leq 3 \times 10^5$
- $A = B$ → 授業は受けなくて良い (！)
- 好きな科目を自習できる → 理解度の低い科目を優先的に自習
- 「理解度の最も低い科目を選び自習」を $NM$ 回行えば良い。
- 理解度の最も低い科目を効率的に選ぶには…？ → ヒープ (`priority_queue`)
- $O(NM \log N)$

## 小課題 3 (27 点)

- $NM \leq 3 \times 10^5$

## 考察 1

- $A_i < B_i$ のとき、授業を自習に置き換えることによって理解度を上げられる。
- $A_i \leftarrow \max(A_i, B_i)$ と更新しておけば、$A_i \geq B_i$ を仮定できる。

## 考察 2

- 各科目の勉強は授業でやった方が効率が良い。
- 各科目の勉強を何回行うか決めたとき、そのうち授業は何回受けられるか？
  → 各科目独立に $M$ 回まで受けられる (！)
  (各科目 $M$ 回までをその科目の授業の枠に入れた後、残りを余った枠に入れることで達成。)

## 小課題 3 (27 点)

- 小課題 2 から少し変更したアルゴリズムで解くことができる。
- $A_i \leftarrow \max(A_i, B_i)$ と更新しておく。
- 以下を $N \times M$ 回行う。
  - `priority_queue` で理解度の最も低い科目 $i$ を選ぶ。
  - $M$ 回目までの科目 $i$ の勉強 → 理解度が $A_i$ 上がる
  - $M+1$ 回目以降の科目 $i$ の勉強 → 理解度が $B_i$ 上がる
- $O(NM \log N)$

## 小課題 4 (29 点)

- $A = B$ → 授業は受けなくて良い (!)
- $N \leq 3 \times 10^5,\ M \leq 10^9$ → 小課題 2 の $O(NM \log N)$ 解は TLE

## 考察

- $NM$ 回自習を行って、理解度の **最小値の最大化**
- 最小値の最大化 → 答えを二分探索!

## 答えを二分探索

- 最小値の最大値、L 番目に小さい値の K 番目に小さい値、中央値の中央値など、**代表値の代表値** といえば **答えを二分探索**！
- 「答えは $x$ 以上ですか？」という判定問題が高速に解けるとき、答えを二分探索することで元の問題を解くテクニック
- AtCoder Beginner Contest にも頻出
  - ABC236 E - Average and Median
  - ABC227 D - Project Planning

## 小課題 4 (29 点)

- 判定問題 : $NM$ 回自習を行って、全ての科目の理解度を $x$ 以上にできますか？
- 科目 $i$ の理解度を $x$ 以上にするには $\left\lceil \frac{x}{B_i} \right\rceil$ 回の自習が必要
- $\sum_i \left\lceil \frac{x}{B_i} \right\rceil \leq NM$ であれば Yes 、そうでなければ No
- 判定問題が $O(N)$ で解けるので、二分探索の上限を $MB_{\max}$ とすると $O(N \log(MB_{\max}))$ でこの小課題が解ける。

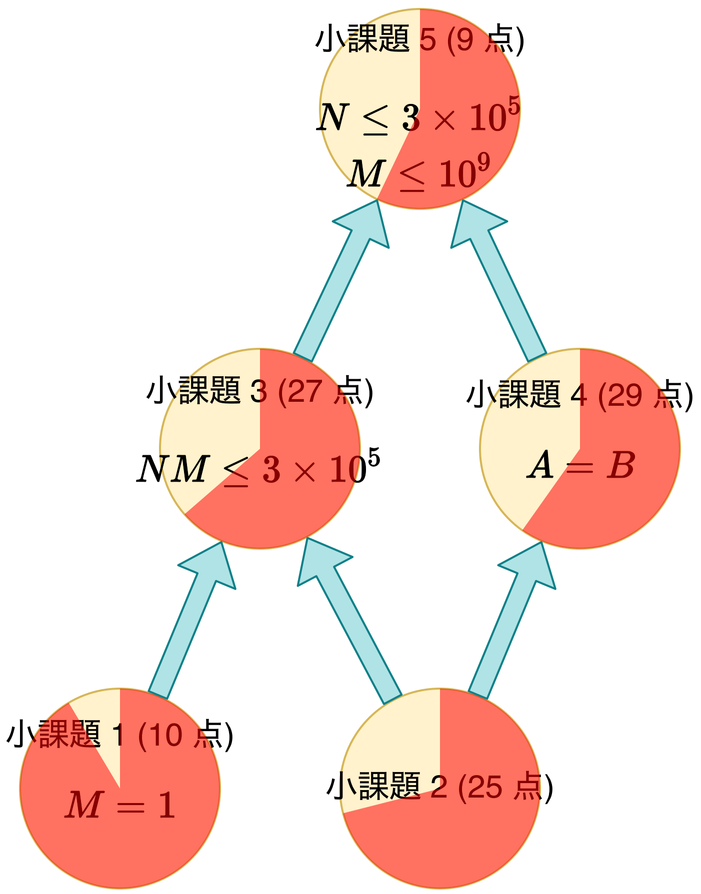
## 小課題 5 (9 点)

- 追加の制約はない
- 小課題 3 と 4 を組み合わせよう
- 小課題 3 の考察 : 各科目の勉強を何回行うか決めたとき、そのうち授業は各科目独立に $M$ 回まで受けられる
- 小課題 4 の考察 : 「全ての科目の理解度を $x$ 以上にできますか？」という判定問題を解いて答えを二分探索

## 小課題 5 (9 点)

- 判定問題 : $NM$ 回自習や授業を行って、全ての科目の理解度を $x$ 以上にできますか？
- $A_i \geq B_i$ と仮定する。
- 科目 $i$ の理解度を $x$ 以上にするには…
  - $x \leq \ MA_i$ ならば、$\left\lceil \dfrac{x}{A_i} \right\rceil$ 回の授業
  - そうでなければ、$M$ 回の授業と $\left\lceil \dfrac{x - MA_i}{B_i} \right\rceil$ 回の自習が必要
- 判定問題が $O(N)$ で解けるので、二分探索の上限を $MA_{\max}$ とすると $O(N \log(MA_{\max}))$ で満点を得られる。 💯

# 得点分布



小課題 5 (9 点)
$N \leq 3 \times 10^5$
$M \leq 10^9$
小課題 3 (27 点)
$NM \leq 3 \times 10^5$
小課題 4 (29 点)
$A = B$
小課題 1 (10 点)
$M = 1$
小課題 2 (25 点)