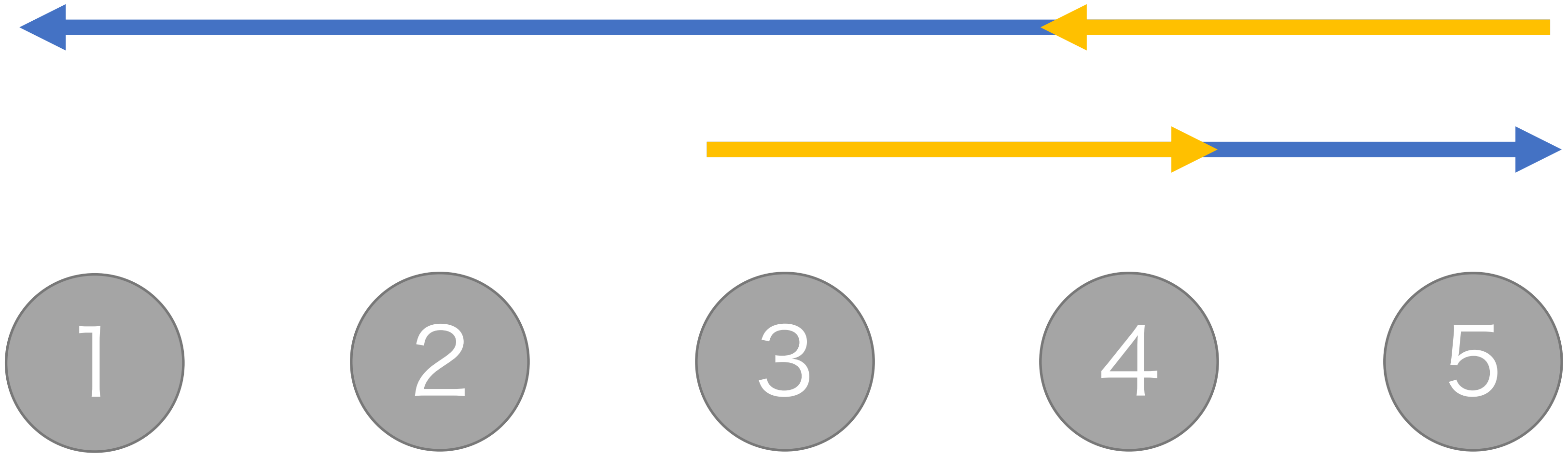
第４問　「鉄道旅行２」

解説：星井 智仁

問題概要

- M 本の系統があります
  - 駅A_iを出発し終点の駅B_iまで各駅に停車する
  - 駅A_iを含めたK駅以内の駅からしか乗車できない
- Q個のクエリが与えられる
  - 駅S_iから駅T_iに訪れるために乗る必要がある列車の本数の最小値は？

- 入力例 1 の図示



0 満点へのロードマップ

小課題 1	小課題 2	小課題 3	小課題 4	小課題 5	小課題 6
$N, M, Q \leq 300$	$N, M, Q \leq 2000$	$Q = 1$	$K = N - 1$	$A_i < B_i$ $S_i < T_i$	追加の制約はない
BFSなど		前処理の改善	後処理の改善	小課題4を拡張	小課題5を拡張

小課題 1

$N, M, Q \leq 300$

小課題 1 の解法

- $N, M, Q \leq 300$ なので、3乗まで許される
  - いきなり多項式時間に落とさないといけない
  - どうしよう

小課題 1 の解法

- $N, M, Q \leq 300$ なので、3乗まで許される
  - いきなり多項式時間に落とさないといけない
  - 各クエリあたり$O(NM)$とか$O(N^2)$くらいでなんとかしたい

小課題 1 の解法

- 各クエリあたり$O(NM)$で解く解法
  - (今いる座標, 今乗っている路線)をindexにして01BFS
    - 01BFSはBFSの拡張で，コストが0と1のときに使える手法
    - Dijkstra法だとlogが乗るので厳しいかも

8点

小課題 2

$N, M, Q \leq 2000$

小課題 2 の解法

- $N, M, Q \leq 2000$なので，2乗まで許される
  - 1つのクエリあたり$O(N)$とか遅くとも$O(N \log N)$くらいで答えたい

小課題 2 の解法

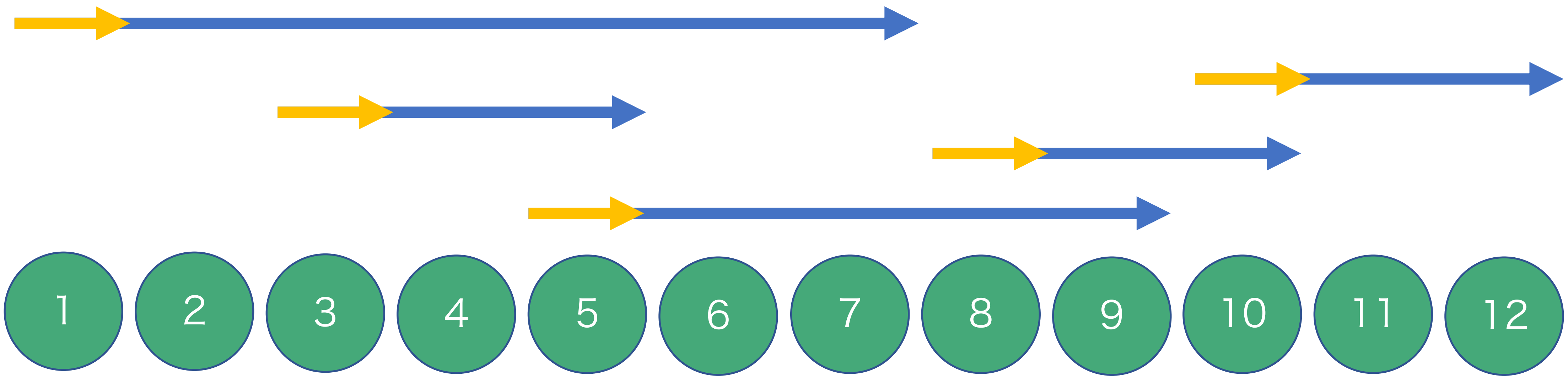
- $N, M, Q \leq 2000$なので，2乗まで許される
  - 1つのクエリあたり$O(N)$とか遅くとも$O(N \log N)$くらいで答えたい
- 小課題1からM倍早くする必要あり
  - どの系統の列車に乗車しているかという情報は必要か？
    - いらない
  - 到達可能な区間だけを気にすればよい

小課題２の解法

- それぞれの駅から１回列車に乗車することで到達可能な範囲は？
  - $O(MK)$で愚直に前処理してOK
- 到達可能な区間を広げていくように更新

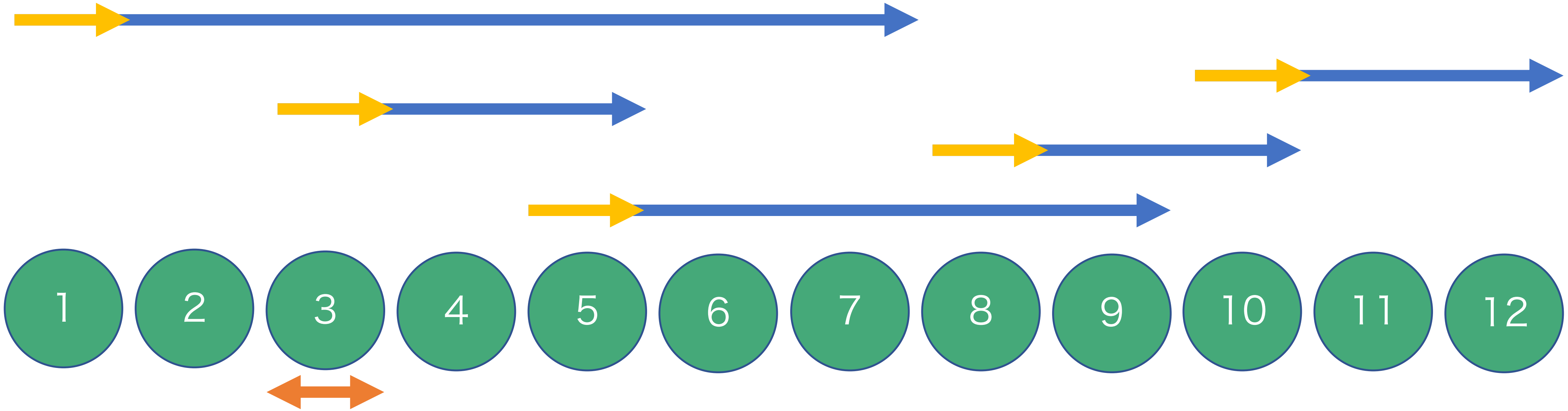
小課題２の解法

- それぞれの駅から１回列車に乗車することで到達可能な範囲は？
  - $O(MK)$で愚直に前処理してOK
- 到達可能な区間を広げていくように更新



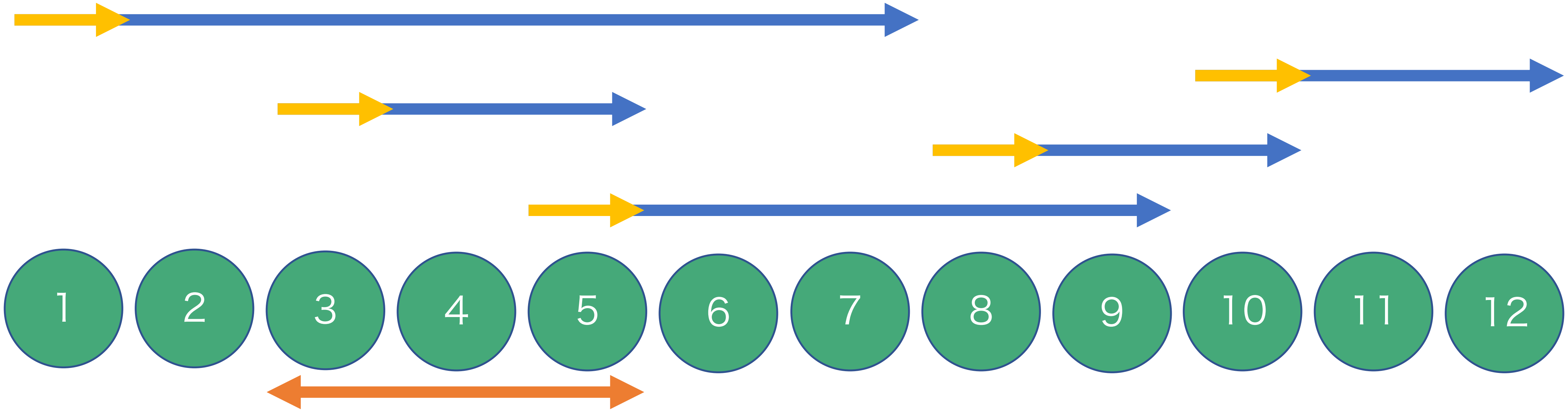
小課題２の解法

- それぞれの駅から１回列車に乗車することで到達可能な範囲は？
  - $O(MK)$で愚直に前処理してOK
- 到達可能な区間を広げていくように更新



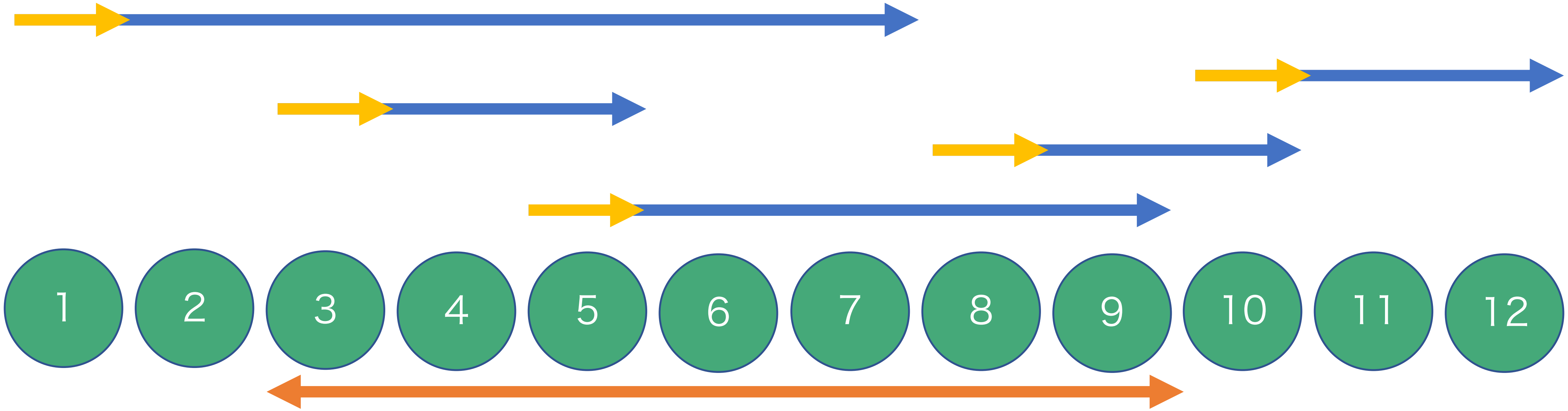
小課題２の解法

- それぞれの駅から１回列車に乗車することで到達可能な範囲は？
  - $O(MK)$で愚直に前処理してOK
- 到達可能な区間を広げていくように更新



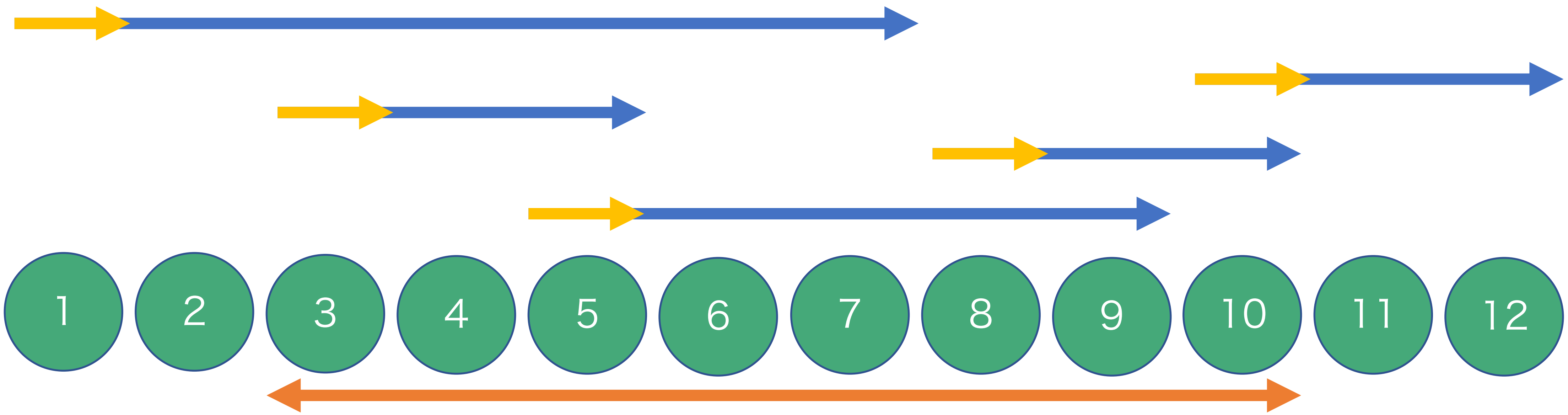
2 小課題２の解法

- それぞれの駅から１回列車に乗車することで到達可能な範囲は？
  - $O(MK)$で愚直に前処理してOK
- 到達可能な区間を広げていくように更新



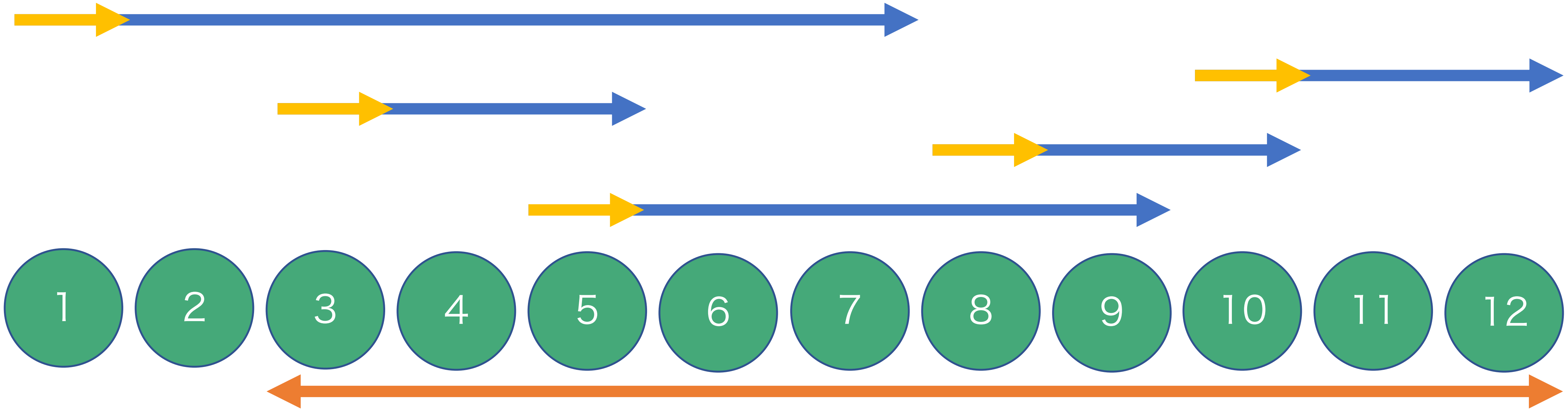
小課題２の解法

- それぞれの駅から１回列車に乗車することで到達可能な範囲は？
  - $O(MK)$で愚直に前処理してOK
- 到達可能な区間を広げていくように更新



2 小課題２の解法

- それぞれの駅から１回列車に乗車することで到達可能な範囲は？
  - $O(MK)$で愚直に前処理してOK
- 到達可能な区間を広げていくように更新



小課題２の解法

- 前処理$O(MK)$ 各クエリごとに$O(N)$
- 合計$O(MK+NQ)$で解けました

16点

小課題 3

$$Q = 1$$

3 小課題 3 の解法

- 小課題２の解法は$O(MK + NQ)$

小課題 3 の解法

- 小課題２の解法は$O(MK + NQ)$
- 頑張って定数倍高速化をすると解けるらしい

27点

小課題 4

$$K = N - 1$$

小課題 3 の解法

- 小課題２の解法は$O(MK+NQ)$

小課題 3 の解法

- 小課題２の解法は$O(MK + NQ)$
    - これを改善したい
        - $Q = 1$なので，　今のままだと計算量は$O(MK + N)$

小課題 3 の解法

- 小課題２の解法は$O(MK+NQ)$
  - これを改善したい
    - $Q=1$なので，　今のままだと計算量は$O(MK+N)$
    - ボトルネックは$O(MK)$の前処理

小課題 3 の解法

- 前処理の高速化
  - データ構造を使う
    - Segment Treeで$O(M \log N)$
    - スライド最小値で$O(N + M)$
    - お好きなのでどうぞ

27点

小課題 4

$$K = N - 1$$

4 小課題 4 の解法

- $K = N - 1$ が意味するものとは？
  - 列車にどの駅からも乗れる

小課題 4 の解法

- $K = N - 1$ が意味するものとは？
  - 列車にどの駅からも乗れる
    - わざわざ遠回りしない
      - 右に行くなら右へ行く列車だけ気にすればよい

小課題 4 の解法

- $K = N - 1$ が意味するものとは？
  - 列車にどの駅からも乗れる
    - わざわざ遠回りしない
      - 右に行くなら右へ行く列車だけ気にすればよい
    - たどり着けるなるべく遠くの駅まで行く列車に乗るのが最適

小課題 4 の解法

- $K = N - 1$ が意味するものとは？
  - 列車にどの駅からも乗れる
    - わざわざ遠回りしない
      - 右に行くなら右へ行く列車だけ気にすればよい
    - たどり着けるなるべく遠くの駅まで行く列車に乗るのが最適
      - この手の問題はダブリングで解ける
        - 類題：ARC060 E - 高橋君とホテル
        - $O((N + Q) \log N)$

27点	25点	

ダブリングとは？

- 各場所から1回，2回，2^2回，⋯，2^k回操作後の場所を記録しておくことで，各クエリに対して対数オーダーで答える手法
- 記録する際もそれまで計算した結果を用いる
  - 例えば，ある場所から2^k回操作後の場所を計算するとき
    - kが小さい方から計算していく
    - 「ある場所から2^{k-1}回操作後の場所」から2^{k-1}回操作後の場所は既に計算済み
- 説明する時間がないので各自調べてください

小課題 5

$A_i < B_i \;\; S_i < T_i$

5 小課題 5 の解法

- 制約より，小課題４と同様に一方向に進む場合のみ考える

小課題 5 の解法

- 制約より，小課題４と同様に一方向に進む場合のみ考える
  - 小課題４と違い，途中下車するのが最適な場合がある
    - どうしよう

小課題 5 の解法

- 制約より，小課題４と同様に一方向に進む場合のみ考える
  - 小課題４と違い，途中下車するのが最適な場合がある
    - 小課題４と同じ方法が使えないか？
      - 実は使えます

5 小課題５の解法

- 途中下車するダブリング
  - ある区間に対して2^k回操作した後にたどり着ける最大値を知りたい
    - 区間取得といえば，Segment Tree
    - Sparse Tableでも可

    - $O((N+Q)(\log N)^2)$とかで解ける

27点	25点	35点	

小課題 6

追加の制約はない

6 小課題 6 の解法

- 小課題５を双方向にする
  - 右に行ったり左に行ったりしても同様に解ける

100点

得点分布

7 得点分布

50点以上 13

50点未満 167

平均点 10.1