問題 5：Sandcastle 2

JOI 2021/2022 本選 解説

東京大学一年 米田寛峻 (square1001)

みなさん、競技お疲れ様でした！

問題の説明

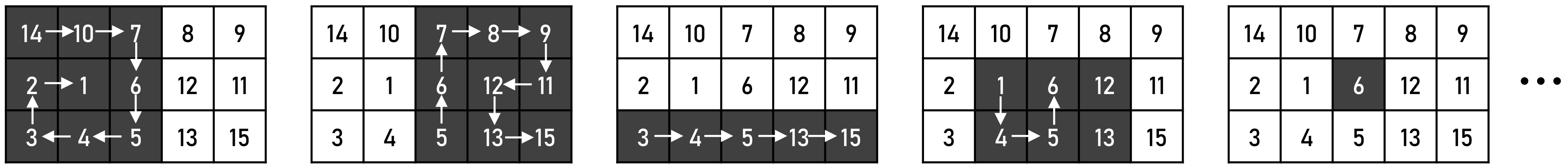
$H \times W$ のマス目があり、各マスには整数 $A_{i,j}$ が書かれています

- ただし $A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots, A_{H,W}$ はすべて相異なる

14	10	7	8	9
2	1	6	12	11
3	4	5	13	15

以下のような長方形領域の個数を数えましょう！

（条件）あるマスから出発し、訪れるマスの整数が単調減少になるように、
領域中のすべてのマスを訪れることができる。



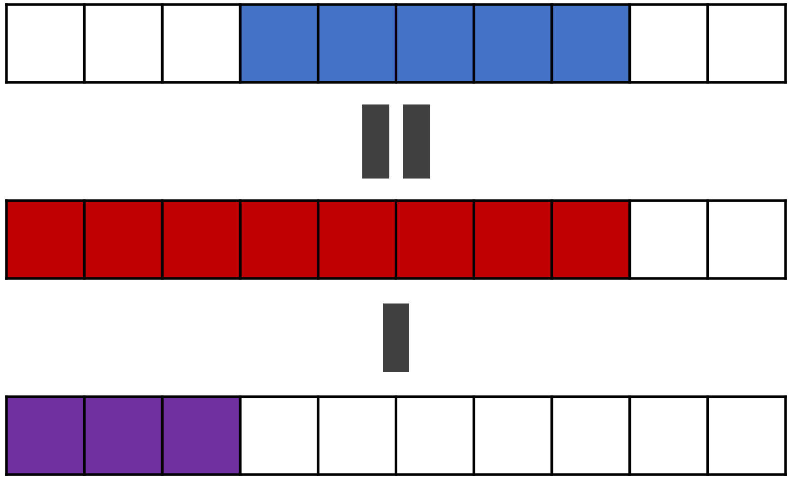
各小課題の制約

〔小課題 1 (9 点)〕	$H = 1$
〔小課題 2 (10 点)〕	$HW \leq 100$
〔小課題 3 (5 点)〕	$HW \leq 1500$
〔小課題 4 (56 点)〕	$HW \leq 7000$
〔小課題 5 (20 点)〕	$HW \leq 50000$

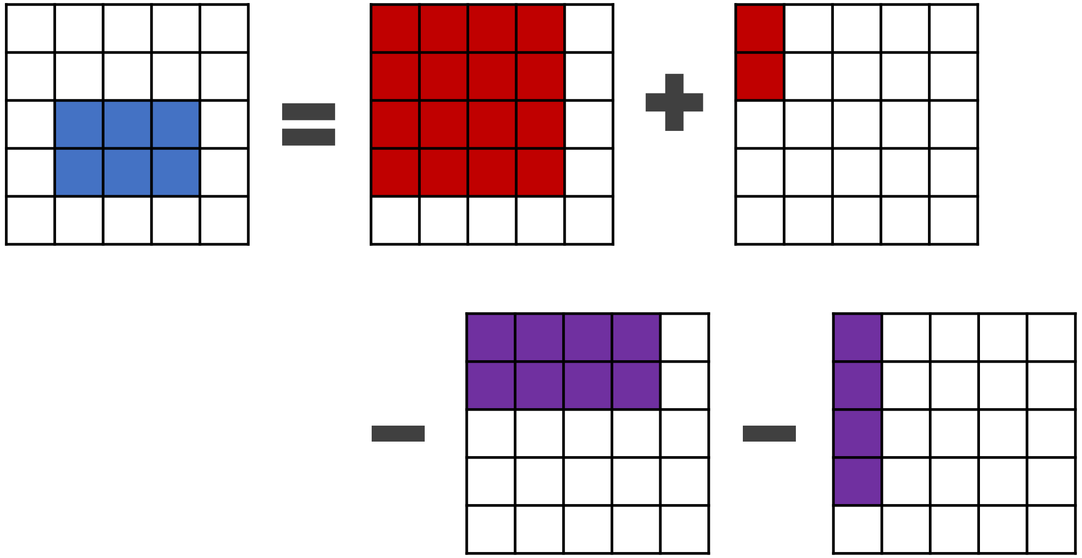
前提知識

この問題は難しいですが、難しい前提知識は必要としません
累積和 を知っていれば解法が理解できます

<1 次元累積和>



<2 次元累積和>



小課題 I の解法

$H = 1$ の場合、左から右 or 右から左 に進むことに

2	6 → 4 → 3	5	7	8	1	

2	6	4	3 ← 5 ← 7 ← 8	1

したがって、この問題の答えは

（長さ 2 以上の増加部分列の個数）＋（長さ 2 以上の減少部分列の個数）＋ N

と求められる

小課題 1 の解法

単調増加な連続部分列 の個数を求めたい

増加する区間に分けて考えると、以下のように求められる

2	6	4	3	5	7	8	1

この区間の増加部分列は 1 個

2	6	4	3	5	7	8	1

この区間の増加部分列は 0 個

2	6	4	3	5	7	8	1

この区間の増加部分列は 6 個

2	6	4	3	5	7	8	1

この区間の増加部分列は 0 個

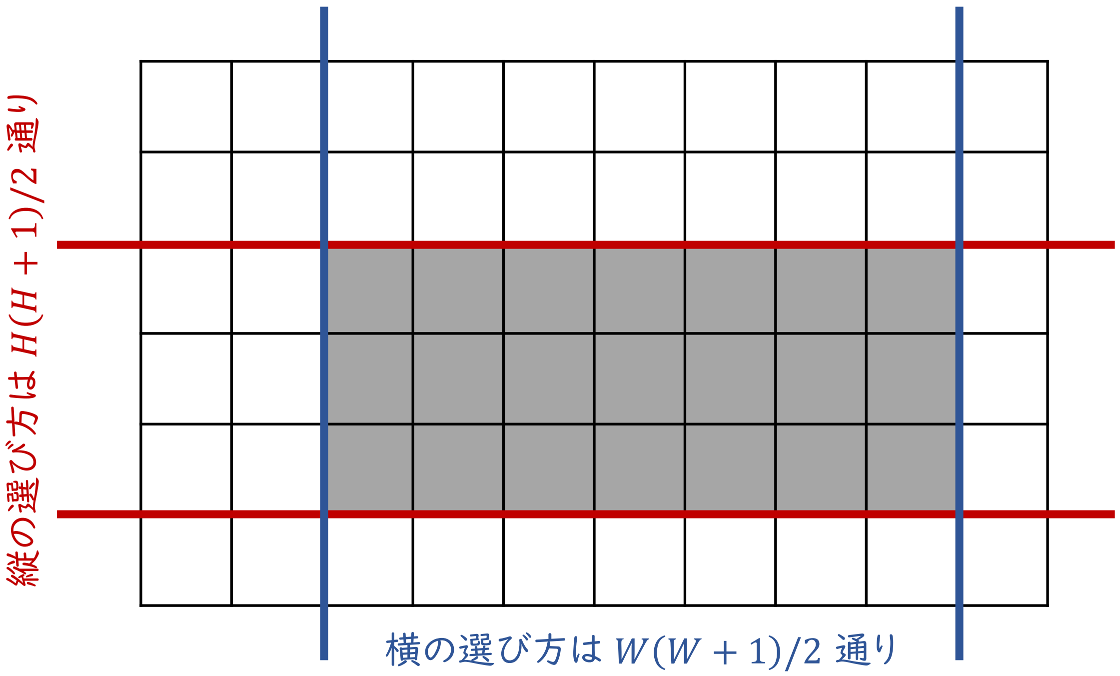
→ 合計 1 + 0 + 6 + 0 = 7 通り

それぞれの区間に対し $L(L-1)/2$ を足すことで
答えが計算量 $O(W)$ で求められます

小課題 2 の解法

この小課題の制約は「$HW \leq 100$」… 長方形領域を 全探索 したい

長方形領域の数は、大体 $H^2W^2/4$ 通り

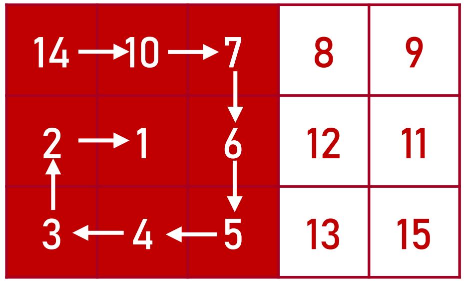


小課題２の解法

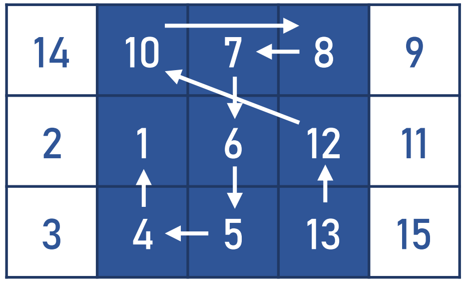
各長方形領域に対して「全マス通れるか判定」したい

≪判定のアルゴリズム≫

1. マスを数が大きい順にソートする
2. マスの数の大きい順に移動する時に、すべての移動が隣のマスになのか判定



達成可能な例



達成不可能な例

小課題 2 の解法

これで、$h \times w$ の長方形領域に対して、判定が計算量 $O(hw \log hw)$ でできます

よって、この問題は計算量 $O(H^3W^3 \log HW)$ で解けました
小課題 2 に通ります

小課題 3 の前に

ここでクイズです！

Q すべての長方形領域のサイズの合計は、定数倍も含めてどのくらいになる？

A $O(HW)$ のサイズの長方形領域が $O(H^2W^2)$ 個なので、合計は $O(H^3W^3)$

定数倍は…？

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{36}$$

長方形領域の個数　縦の長さの期待値　横の長さの期待値

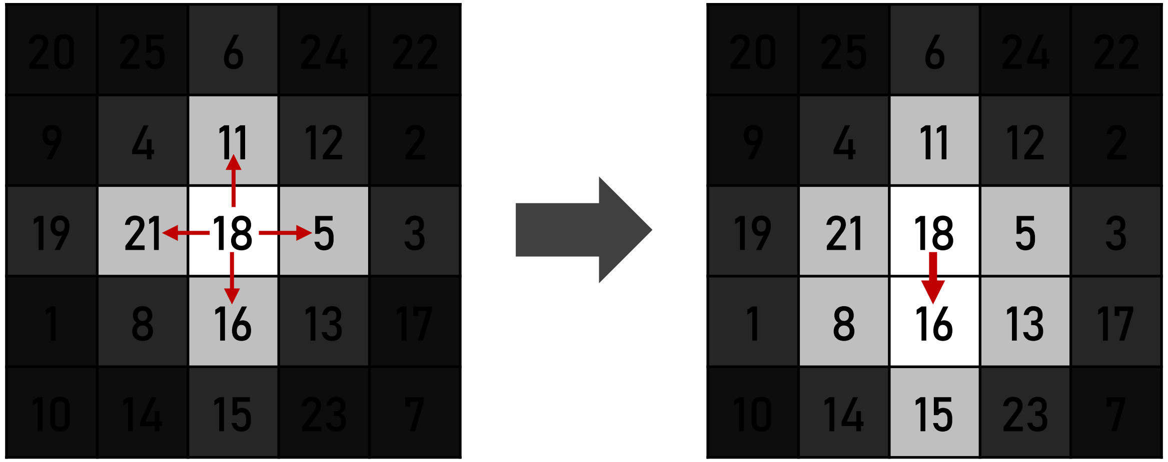
なので、計算量 $O(H^3W^3)$ なら $HW \leq 1500$ でも十分高速に動作しそう

小課題 3 の解法

あなたが JOI 君になりきって、砂の城の上を歩くことを考えます

Q あなたならどっち方向に進みますか？

A 下方向に進む（数が小さくなる中で最大のものに進むのが最適）

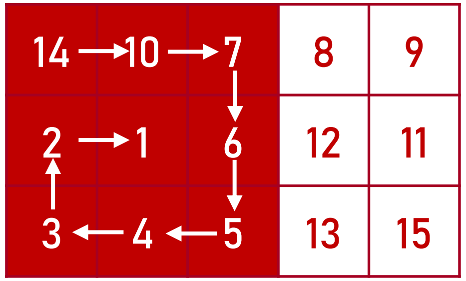


小課題 3 の解法

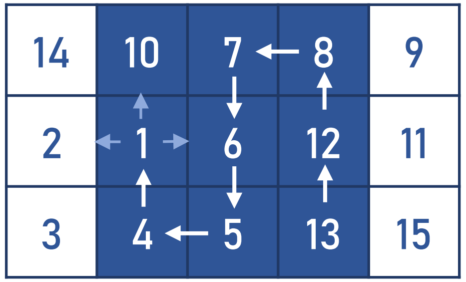
≪判定のアルゴリズム≫

1. 最も大きい数のマスからスタートする
2. 「数が小さくなる中で最大のものに進む」ことを繰り返したとき、長方形領域内のすべてのマスを訪れるか判定

各長方形領域に対し $O(hw)$ で判定できるので、全体計算量 $O(H^3W^3)$ で十分高速



達成可能な例



達成不可能な例

小課題 4 の目標

小課題 4 の制約は「$HW \leq 7000$」

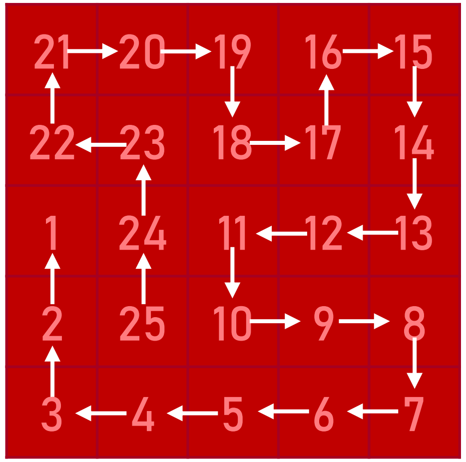
計算量 $O(H^2W^2)$ とかで解かなければならない

小課題 4 の目標

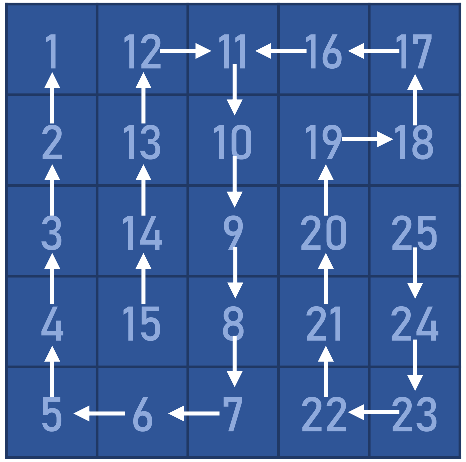
各長方形領域に対して
計算量 $O(1)$ で判定する

小課題 4 の解法のコンセプト

各マスから出る矢印の方向は、最初から決まっている



1 つのパスになっている
→ 達成可能



1 つのパスになってない
→ 達成不可能

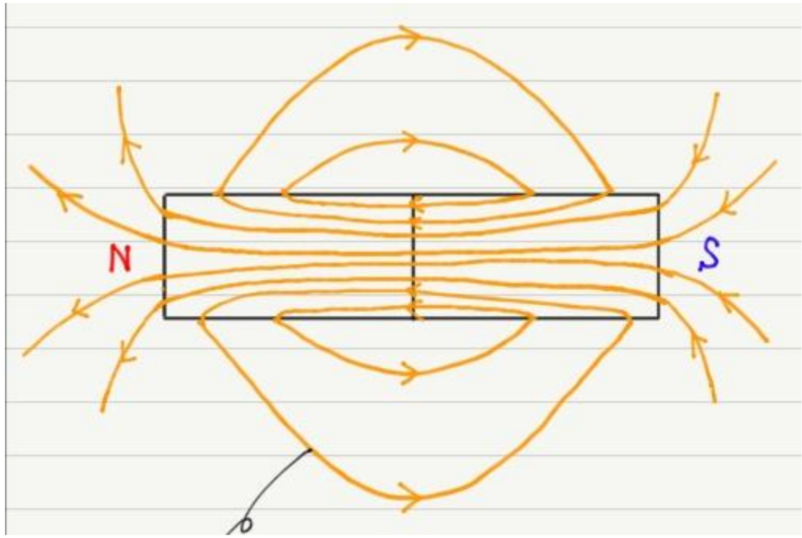
矢印が 1 つの流れになっているかを、計算量 $O(1)$ で判定したい！ どうやって？

小課題 4 の解法のコンセプト

ところで、物理の法則について考えてみよう

磁束線

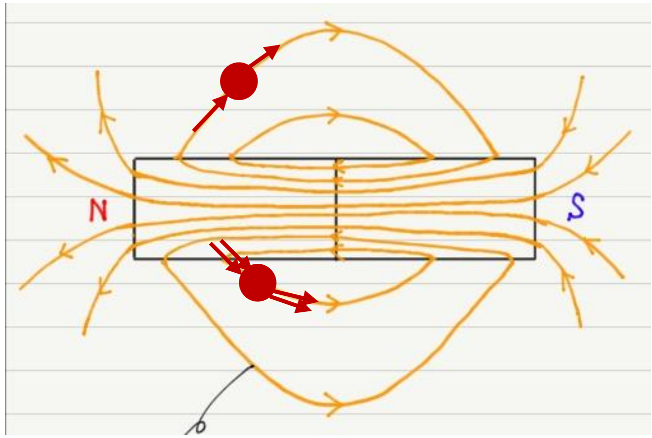
磁束線は、1 つのサイクルを描く



（画像は https://www.yukimura-physics.com/entry/elemag21 より引用）

これは以下のように言い換えることができる

「すべての点において、入ってくる磁場と出ていく磁場が同じ」（磁場のガウスの法則）



小課題 4 の解法のコンセプト

この問題にも同じようなアイデアが使えないか？

「1 つの流れになっている」

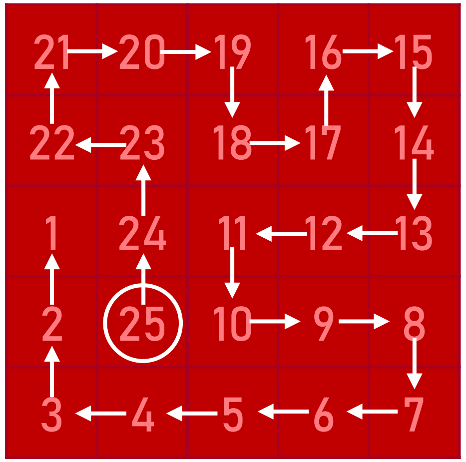
↓

「入ってくる矢印の本数がすべて 1 本
（ただし始点は除く）」

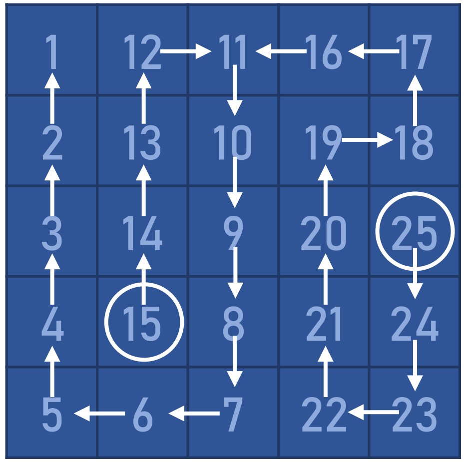
※ 出ていく矢印の本数は常に 1 本なので、流れをつなげる
ためには入ってくる矢印の本数は 1 本でなければならない

↓

「入ってくる矢印が 0 本のマスが 1 個だけ」



1 個だけなので OK



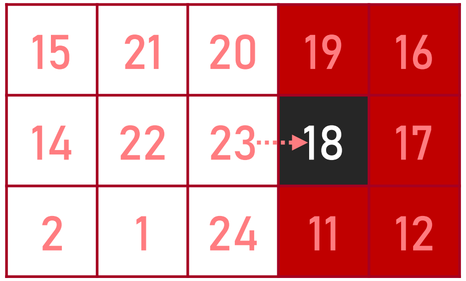
2 個あるので NG

小課題 4 の解法

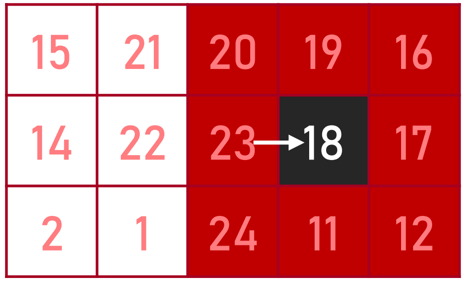
「入ってくる矢印が 0 本」のマスの個数を $O(1)$ で数えたい！

そもそも、入ってくる矢印は、長方形領域によってどう変わるか？

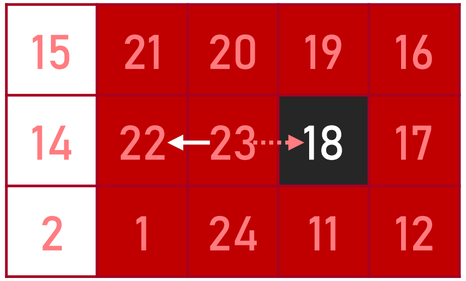
例：左から入る矢印の場合



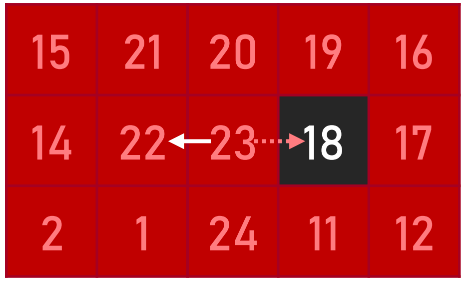
左は領域の外なので
矢印は入ってこない



左から矢印が
入ってくる



左のマスからは外に矢印が出るので
矢印は入ってこない



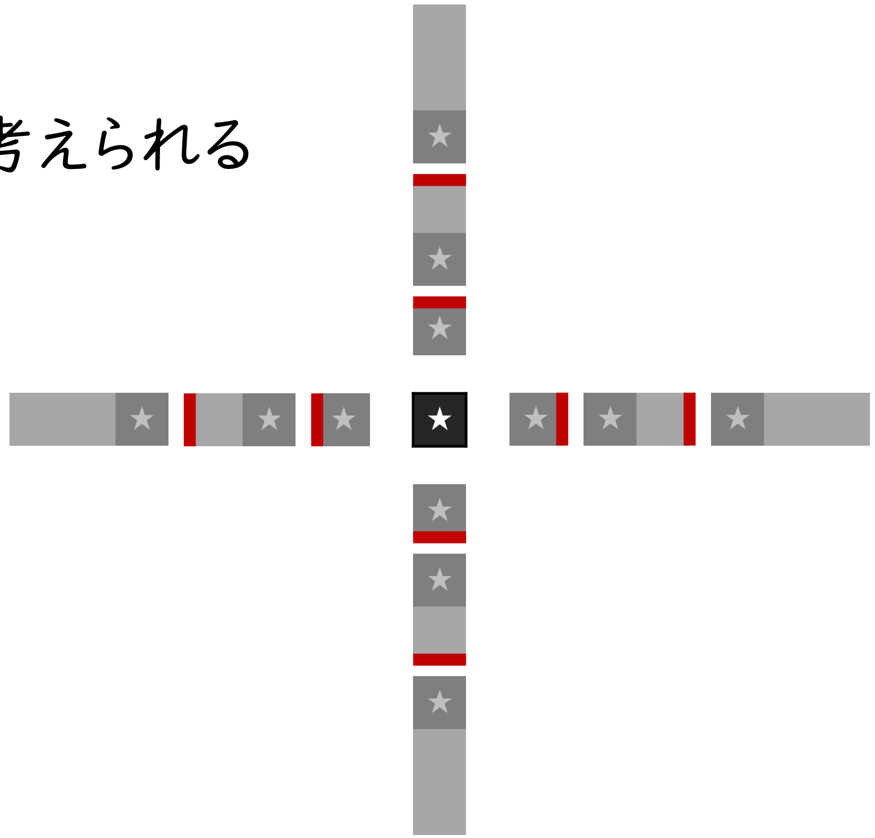
境界が 2 マス先以上なら
入り方は全部同じ

小課題 4 の解法

矢印の入り方は、境界が「そのマスか」「1 マス先か」「2 マス以上先か」で変わる

上下左右 4 方向あるので、全部で $3^4 = 81$ パターン考えられる

- このすべてに対して、「入ってくる矢印が 0 本」の
  マスの個数を 2 次元累積和 で記録
- つまり、$H \times W$ の 2 次元累積和を 81 個作る

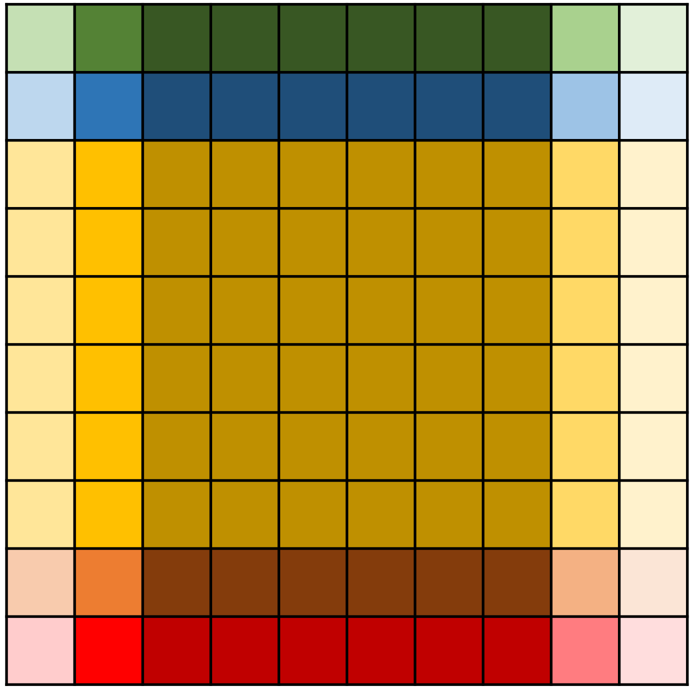


小課題 4 の解法

すると…「入ってくる矢印が 0 本」のマスの個数が $O(1)$ で数えられる!

例えば、$h \times w$ の長方形領域 $(h \geq 5, w \geq 5)$ の場合

- 真ん中の $(h-4) \times (w-4)$ は、全方位「境界が 2 マス以上先」なので、同じ累積和で計算できる
- それ以外も含めて、右図の 25 通りに分けて計算できる



$h \leq 4$ または $w \leq 4$ の場合も、同様に計算できる

小課題 4 の解法

これで、$h \times w$ の長方形領域に対して、判定が計算量 $O(1)$ でできます

よって、この問題は計算量 $O(H^2W^2)$ で解けました
小課題 4 に通ります

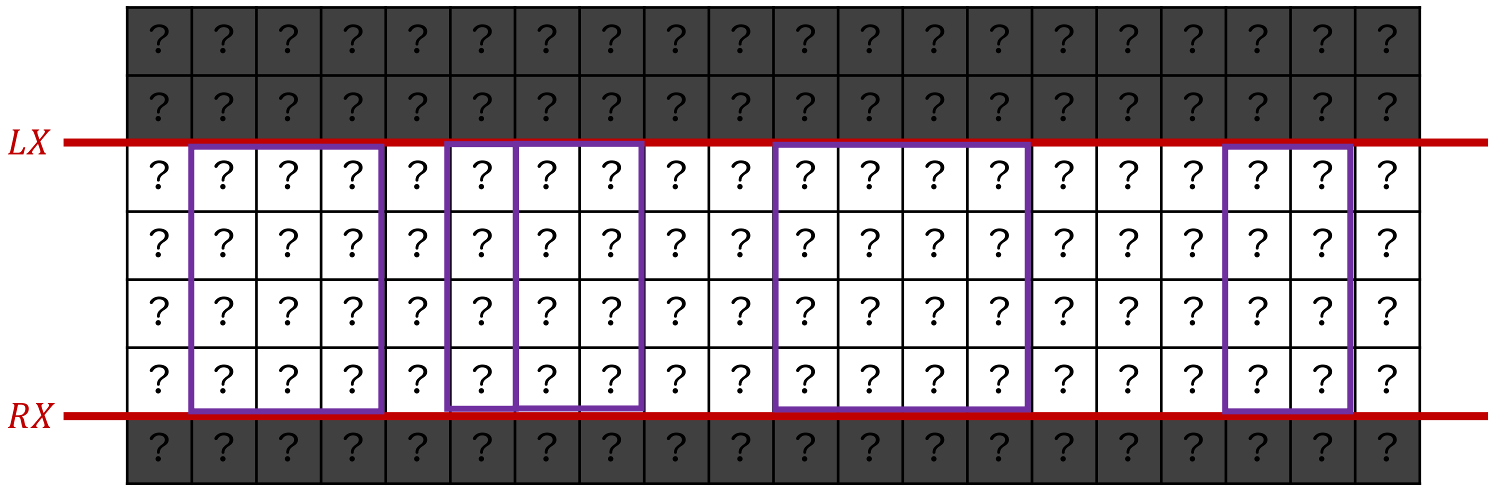
※ 実装によっては実行時間制限に間に合わないこともありますが、前スライドの25 通り中 16 通りは「1 マスだけ」なので、これを 2 次元累積和でなく直接計算する工夫などで、十分に高速化できます。

小課題 5 のアイデア

小課題 5 の制約は「$HW \leq 50000$」

各長方形領域を $O(1)$ で判定することも許されない

アイデア：長方形領域の上と下を固定したときの数え上げを $O(W)$ でできないか？



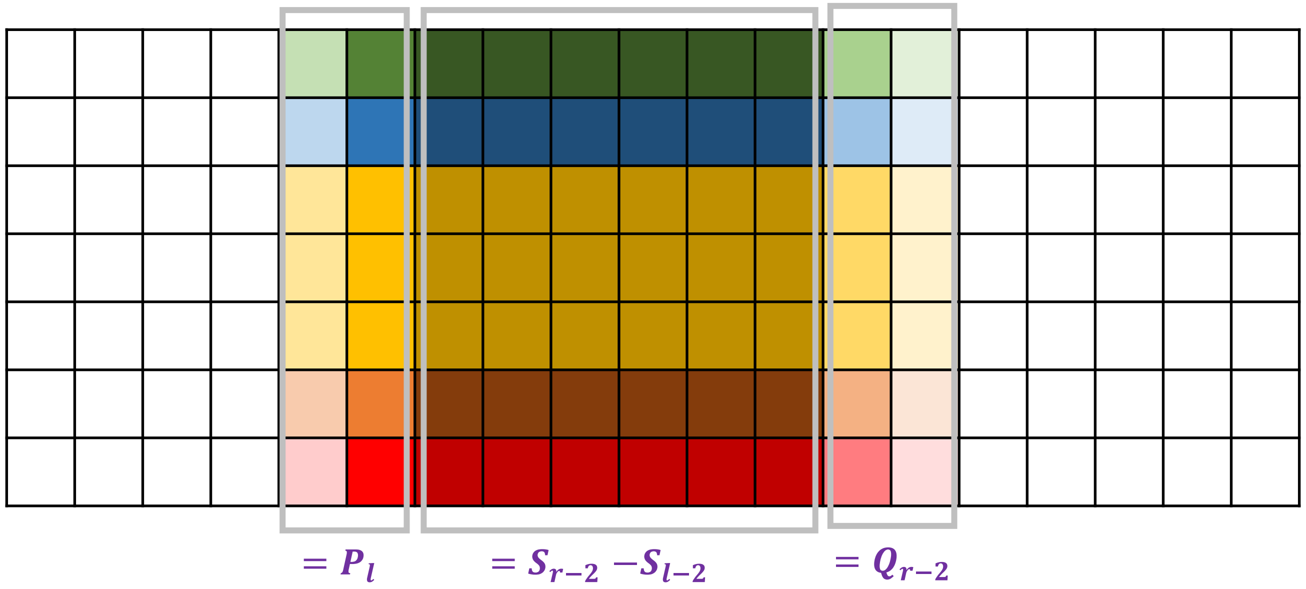
(LX, RX) を全探索

小課題 5 のアイデア

実は、ある区間の「入ってくる矢印が 0 本」のマスの個数は、ほぼ累積和で表せる
（これをスコアとする）

$w \geq 5$ の場合、中央の長さ $w-4$ の区間のスコアは $S_{r-2} - S_{l+2}$ と表せる

なので、区間のスコアは、$B_r = S_{r-2} + Q_{r-2}, A_l = -S_{l+2} + Q_l$ として $B_r - A_l$ と表せる
（P_i, Q_i は下図参照）



小課題 5 の解法

したがって、次の問題を解けばよい

> $B_j - A_i = 1$ となる (i, j) $(0 \leq i < j \leq W)$ の組み合わせはいくつか？
>
> $A_i, B_j \leq HW$ であるため、この問題は配列を使って $O(W)$ で解ける

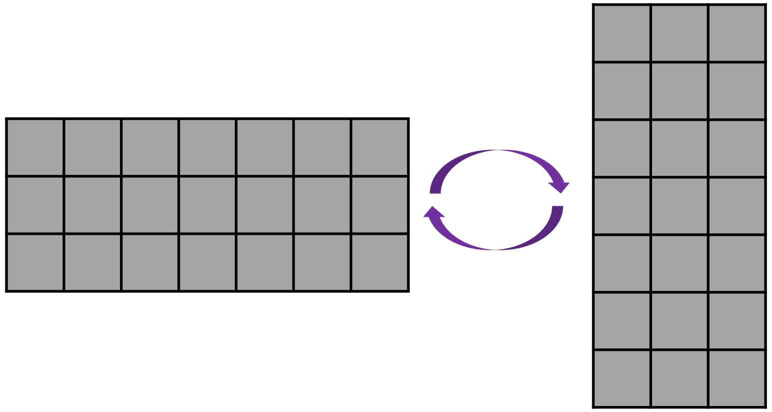
長方形の上端と下端を全探索するので、全体計算量 $O(H^2 \times W)$ で解ける

これだと $H \gg \mathrm{W}$ の場合に時間がかかるが…

小課題 5 の解法

これだと $H \gg$ W の場合に時間がかかるが…

- 長方形を 90 度回転して同じ問題を解くと、$O(H \times W^2)$ になる
- 両解法のうちよい方を採用すると、計算量 $O(HW \times \min(H, W))$ になるので…
- $\min(H, W) < \sqrt{HW}$ だから、計算量の中身は $(HW)^{1.5}$ になるので AC!!



統計情報