JOI2023/2024 本選 2 問目
建設事業 2 (Construction Project 2) 解説

解説: 蜂矢 倫久 (Mitsubachi)

Step 0

問題概要

0 問題概要

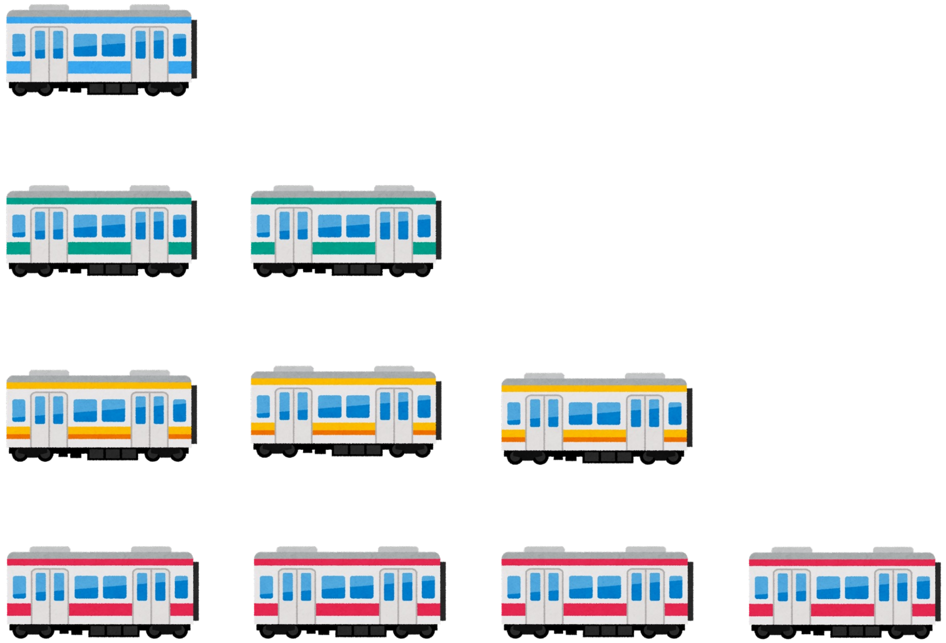
- N 頂点 M 辺のグラフがあります
- 辺は無向辺で、 i 番目の辺の長さは C_i です
- 長さ L の辺を 1 本追加して、条件「頂点 S から頂点 T までの最短距離が K 以下」を満たしたいです
- 追加して条件を満たせる辺は何通りありますか

0 制約

- N, M ≦ 200 000
- L, C_i ≦ 10^9
- K ≦ 10^15

0 小課題

- 小課題1 (8点)　: $L = 1, K = 2, C_i = 1$
- 小課題2 (16点) : $N, M \leqq 50$
- 小課題3 (29点) : $N, M \leqq 3\,000$
- 小課題4 (47点) : 追加制約なし



Subtask 1

$L = 1, K = 2, C_i = 1$

1 はじめに

- そもそも最初から条件を満たされているなら辺をどう追加しても OK
- よって答えは N(N-1)/2 (オーバーフローに注意!)
- これはどの小課題においても成り立つ

1　最短距離を求めよう

- 最短距離をどうやって求める？
- 小課題 1 は 2 以下かを判定すれば OK
- 最短距離が 1 ⇔ S と T を直接結ぶ辺がある
- 最短距離が 2 ⇔ S と T の両方に繋がる頂点がある
- O(N+M) で判定可能

1 最短距離 > 2 の場合

- 最短距離が 3 以上だったとする
- 最短距離を 1 か 2 にしたい
- 最短距離を 1 にする → S と T を結ぶ
- 最短距離を 2 にする → S に繋がってる頂点と T を結ぶ or T に繋がってる頂点と S を結ぶ

1　S に繋がってる頂点を数える

- S に繋がってる頂点の数を数えたい
- vector や set で A_i = S のときの B_i や B_i = S のときの A_i を管理すればいい
- T についても同様
- O(N+M) などで解けました

Subtask **2**

$N, M \leqq 50$

2 問題の言い換え

- 問題を言い換えると「N(N-1)/2 個のグラフがあるので、それら全てに対して S から T までの最短距離が K 以下を判定してください」となる
- 最短距離を求めるには？
- ダイクストラ法やワーシャルフロイド法を使おう

2 最短距離を求めよう

- 各グラフに対して、ダイクストラ法やワーシャルフロイド法を使おう
- それぞれの計算量は O((N+M)logN), O(N^3)
- よって O(N^2(N+M)logN) や O(N^5) で解けました

Subtask **3**

$N, M \leqq 3\,000$

3 追加前の最短距離について

- 追加前の最短距離が K 以下 → 答えは N(N-1)/2
- 追加前の最短距離は K より大きいとしよう

3 視点を変えてみる

- 追加前の最短距離は K より大きいとする
- 新しく追加する辺に対して条件を満たせるか判定したい
- 実は、追加した辺は使うものとしていい ← なぜ？

3 言い換え

- もし、追加した辺を使わない方法で距離が K 以下となるなら最短距離は K 以下のはず → 矛盾
- u と v の間に辺を追加したとして考える行き方は「S → u → v → T」か「S → v → u → T」の 2 通り(先に u と v のどっちを経由するか)

3 解法

- S → u → v → T の行き方の最短距離は (S から u までの最短距離) + L + (v から T までの最短距離)
- S → v → u → T の行き方の最短距離は (S から v までの最短距離) + L + (u から T までの最短距離)
- (S から i までの最短距離) と (T から i までの最短距離) を全ての頂点 i について知りたい
- これはダイクストラ法

3 解法

- ① ダイクストラ法で (S から i までの最短距離) と (T から i までの最短距離) を全ての頂点 i について求める

- ② 1 ≦ u < v ≦ N を満たす (u, v) について
「(S から u までの最短距離) + L + (v から T までの最短距離) ≦ K」か
「(S から v までの最短距離) + L + (u から T までの最短距離) ≦ K」のうち 1 つ以上を満たすかを判定

3 解法

- ダイクストラ法で O((N+M)logN)、判定部分で O(N^2)
- 全体で O((N+M)logN + N^2) で解けました

Subtask 4

追加制約なし

4 追加前の最短距離について

- 追加前の最短距離が K 以下 → 答えは N(N-1)/2
- 追加前の最短距離は K より大きいとしよう

4 小課題 3 をおさらい

- 条件P「(S から u までの最短距離) + L + (v から T までの最短距離) ≦ K」
- 条件Q「(S から v までの最短距離) + L + (u から T までの最短距離) ≦ K」

- P か Q のうち 1 つ以上を満たす (u, v) の数を数えたい

- これは「P を満たす (u, v) の数」+「Q を満たす (u, v) の数」-「P と Q を両方満たす (u, v) の数」と言い換えられる

4 重要な性質

- 実は「P と Q を両方満たす (u, v) の数」= 0 ← なぜ？

- (S から u までの最短距離) = a,
- (v から T までの最短距離) = b,
- (S から v までの最短距離) = c,
- (u から T までの最短距離) = d とする

- 条件 P ⇔ $a + L + b \leqq K$ ⇔ $a + b \leqq K - L$
- 条件 Q ⇔ $c + L + d \leqq K$ ⇔ $c + d \leqq K - L$

4 証明

- u を経由する方法を考えると**追加した辺を使わずに**距離 a + d で S から T へ行ける
- v を経由する方法を考えると**追加した辺を使わずに**距離 b + c で S から T へ行ける
- よって追加前の最短距離は min(a + d, b + c) 以下
- ここで追加前の最短距離は K より大きいので
a + d > K, b + c > K

4 証明

- $a + d > K,\ b + c > K$
- 足し合わせると $a + b + c + d > 2K$
- ところで、２ページ前のスライドでは以下を示した
- 条件 P ⇔ $a + L + b \leqq K$ ⇔ $a + b \leqq K - L$
- 条件 Q ⇔ $c + L + d \leqq K$ ⇔ $c + d \leqq K - L$
- 足し合わせると $a + b + c + d \leqq 2K - 2L$

4 証明

- よって 2K < 2K - 2L となり L < 0 となる → 矛盾！
- これより示されました
- よって答え = 「P を満たす (u, v) の数」+「Q を満たす (u, v) の数」となる
- ここで u < v が成り立っている(次ページのために明記)

4 求めるものの言い換え

- 「u < v かつ P を満たす (u, v) の数」+「u < v かつ Q を満たす (u, v) の数」を求めたい

- 実はこれは「P を満たす (u, v) の数」に等しい ← なぜ？

- u = v となることはない(重要な性質の証明より成り立つ)
- u > v かつ P を満たす (u, v) は u と v を入れ替えれば u < v かつ Q を満たす (u, v) と一対一対応できる

- よって「u < v かつ Q を満たす (u, v) の数」 = 「u > v かつ P を満たす (u, v) の数」となり、示されました

4 解法

- 「P を満たす (u, v) の数」を求める
- u を固定する
- 「(v から T までの最短距離) ≦ K - (S から u までの最短距離) - L 」となる v の個数を求めたい
- あらかじめ (v から T までの最短距離) を sort しておけば二分探索で O(logN) で v の個数を求めることができる

4 解法

- u を固定したときに O(logN) で v の個数を求められる
- よってダイクストラ法の後は O(NlogN) で数えられる
- ダイクストラ法は O((N+M)logN) なので全体で O((N+M)logN) で解けました

4 別解

- 「u < v かつ P を満たす (u, v) の数」を直接求められる
- 各頂点からの距離を座標圧縮して BIT や Segment Tree などの一点更新区間和取得が可能なデータ構造を使う
- v = 1, 2, ... の順に O(logN) で処理できるので全体で O((N+M)logN) で解けました

Step **5**

得点分布

5 得点分布

- 100点：?人
- 53点: ?人
- 45点: ?人
- 24点: ?人
- 16点: ?人
- 8点: ?人

5 得点分布

- 100点 : 111人
- 53点: 6人
- 45点: 11人
- 24点: 6人
- 16点: 7人
- 8点: 4人