マラソン大会 2

JOI 2023/2024 本選 問題 3 解説

解説担当：米田 寛峻（よねだ ひろたか ／ square1001）

問題概要

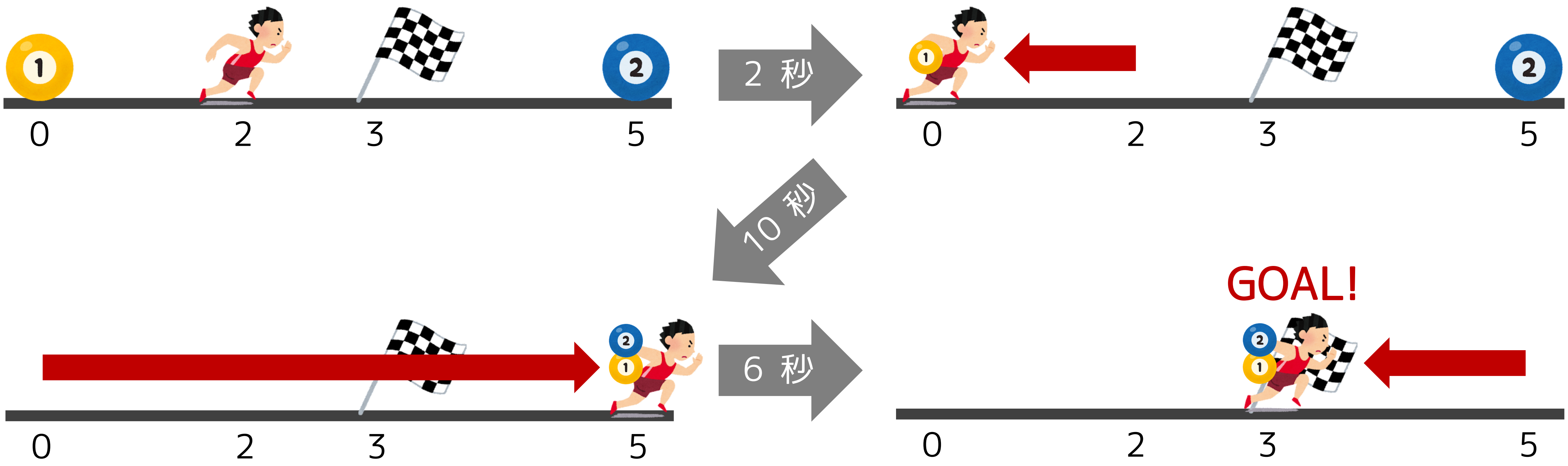
数直線上の座標 $X_1, X_2, \ldots, X_N$ にボールが落ちています

距離 1 の移動に（運んでいるボールの個数）+ 1 秒かかります

以下の Q 個の質問に答えましょう：

- スタート地点 S_j、ゴール地点 G_j、制限時間 T_j 秒
- このとき、N 個のボールを回収して（落とさずに）ゴールは可能か？

具体例で考えてみよう：制限時間 20 秒でゴール可能か？



7 つの小課題

<table>
<tr><th></th><th>累計得点</th><th>N</th><th>Q</th><th>追加制約</th></tr>
<tr><td>1</td><td>7 点</td><td rowspan="2">7</td><td rowspan="5">10</td><td>$S_j = 0, G_j = 0$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>14 点</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>24 点</td><td>14</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>52 点</td><td>100</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>62 点</td><td rowspan="2">2000</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>81 点</td><td rowspan="2">500000</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>100 点</td><td>500000</td><td></td></tr>
</table>

小課題 1［累計 7 点］

小課題 1 では、スタート地点とゴール地点は 道路の左端

Q. ボールをどの順番で取るのが最適か？（最短でゴールできるか？）

小課題 1［累計 7 点］

小課題 1 では、スタート地点とゴール地点は 道路の左端

Q. ボールをどの順番で取るのが最適か？（最短でゴールできるか？）

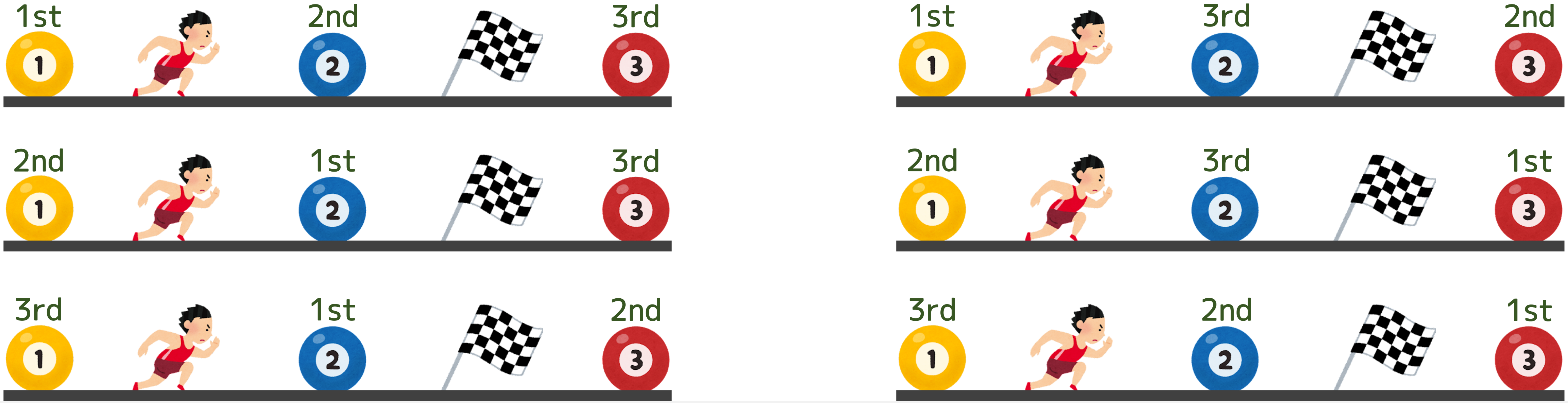
A. 一番右のボールから取る！

最短時間はソートで計算量 $O(N \log N)$ で求められる

小課題 2［累計 14 点］

小課題 2 では、N が 7 以下

ボールを取る順番を $N! = 1 \times 2 \times \cdots \times N$ 通り全探索できる



順列の全探索

C++ では、next_permutation を使って順列の全探索を実装できる

```
int mintime = INF;
vector<int> p(N);
for (int i = 0; i < N; i++) {
    p[i] = i;
}
do {
    // t は消費時間、pos は現在位置
    int t = 0, pos = S;
    for (int i = 0; i < N; i++) {
        t += abs(X[p[i]] - pos) * (i + 1);
        pos = X[p[i]];
    }
    t += abs(G - pos) * (N + 1);
    mintime = min(mintime, t);
} while (next_permutation(p.begin(), p.end()));
```

最短時間の計算プログラム

小課題 3［累計 24 点］

小課題 3 では、N が 14 以下

ビット DP を使って解くことができる

- $dp[S][pos]$ を「現在回収したボールの集合が S であり、現在位置が X_{pos} であるときの、ここまでの最短時間」とする
- 全体の最短時間が計算量 $O(2^N \times N^2)$ で求まる

※ 現在のボールの個数は S から一意に定まるので、DP の状態としてボールの個数を持つ必要がないことに注意

ビット DP

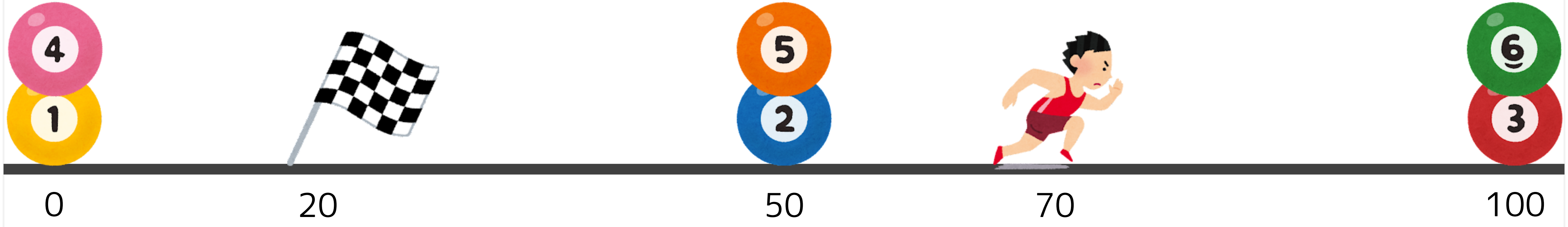
動的計画法（DP）の一種で、状態として「既に取ったボールの集合」などの 2^n 通りの部分集合を持つ DP のことを指す

- 2 進数を用いて実装されるので、ビット DP と呼ばれる
- 典型問題：巡回セールスマン問題（Held-Karp 法）

最適な経路について

ところで、最適解はどんな経路なのか？ 考えてみよう

入力例 3: N = 6, X = [0, 50, 100, 0, 50, 100], S = 70, G = 20

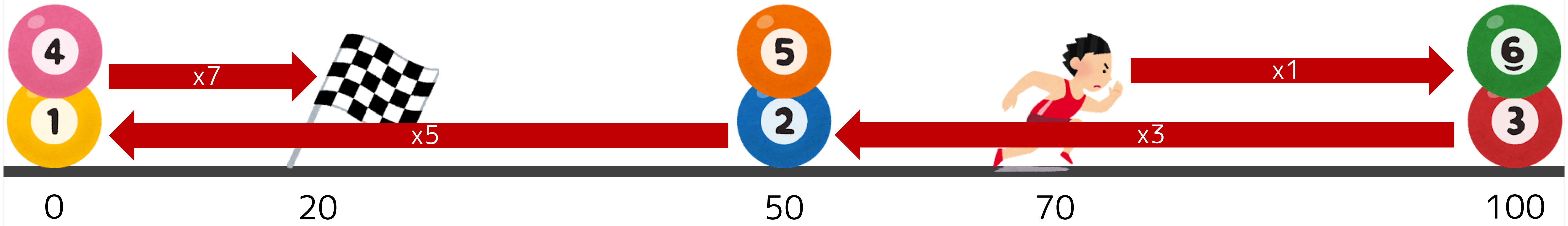


最適な経路について

ところで、最適解はどんな経路なのか？ 考えてみよう

入力例 3: N = 6, X = [0, 50, 100, 0, 50, 100], S = 70, G = 20

最適解は「スタート → 一番右 → 一番左 → ゴール」（576 秒）



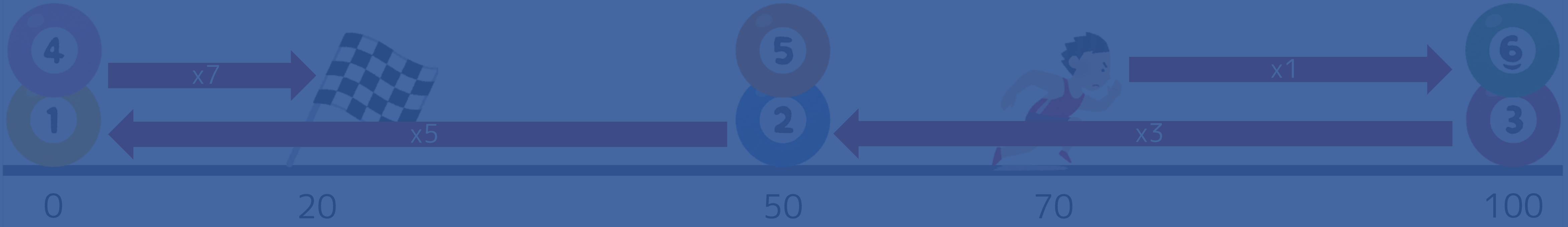
予想 1：左右の端で折り返すのが最適解？

4 最適な経路について

ところで、最適解はどんな経路なのか？ 考えてみよう

入力例 3：N = 6, X = [0, 50, 100, 0, 50, 100], S = 70, G = 20

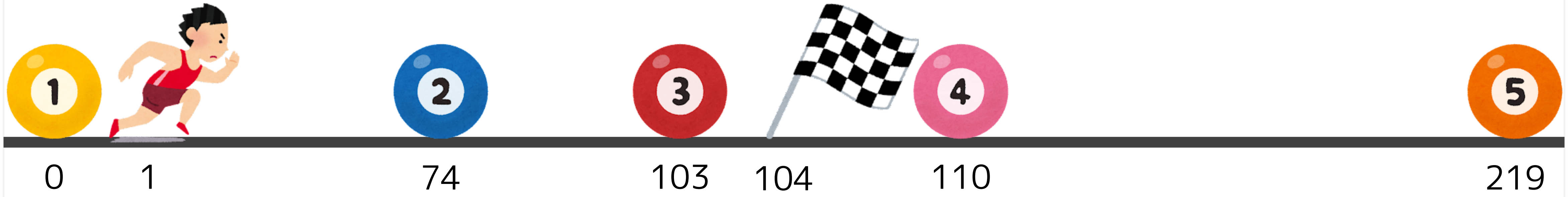
最適解は「スタート → 一番右 → 一番左 → ゴール」（576 秒）



最適な経路について

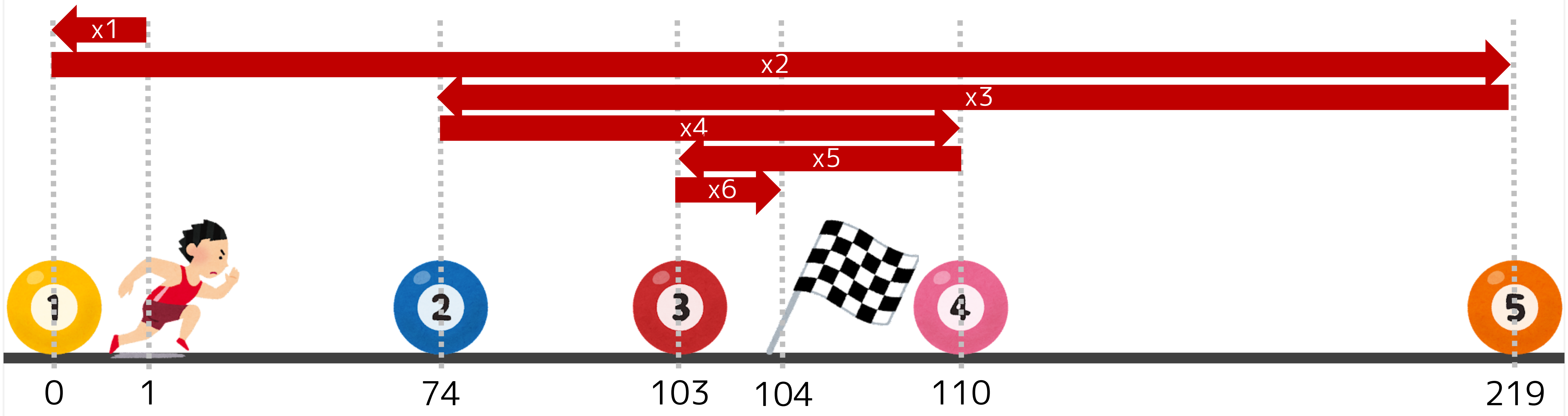
残念ながらこの予想は正しくない

例: N = 5, X = [0, 74, 103, 110, 219], S = 1, G = 104



最適な経路について

N 個のボールがあって N 回曲がるのが最適なケースもある！



4 最適な経路について

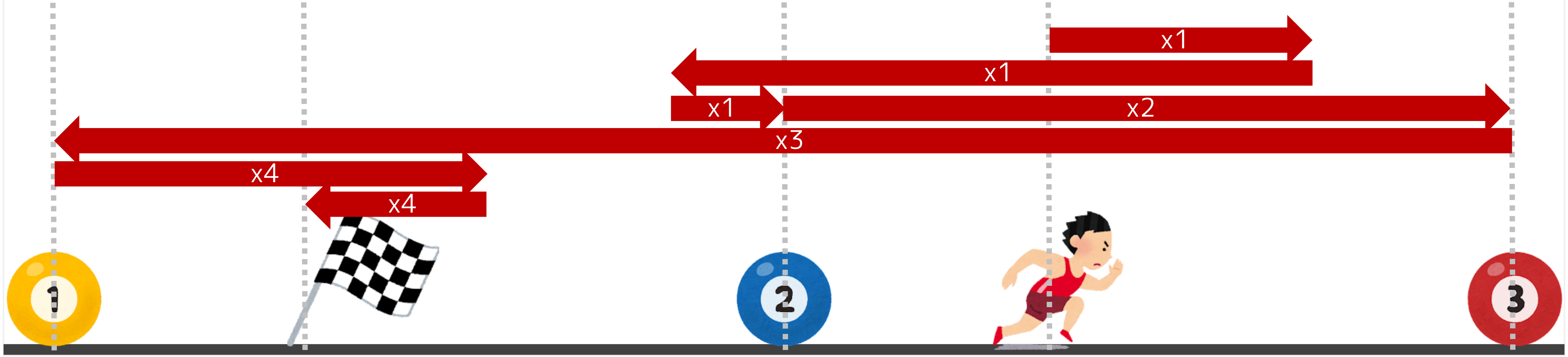
N 個のボールがあって N 回曲がるのが最適なケースもある！

本当にどんな経路でもアリなのか？

最適な経路について

本当にどんな経路でもアリなのか？

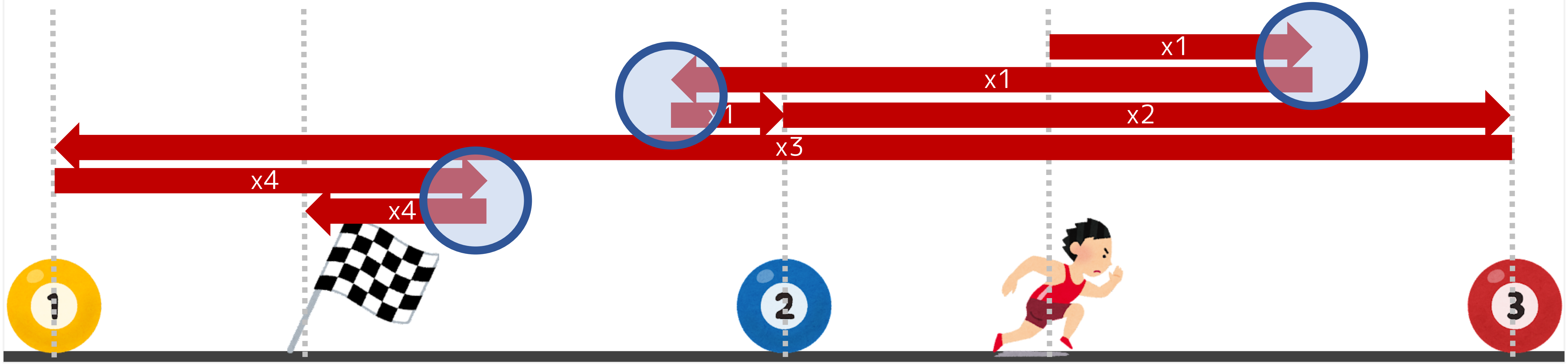
適当な経路を考えてみよう：こんな経路はアリ？



最適な経路について

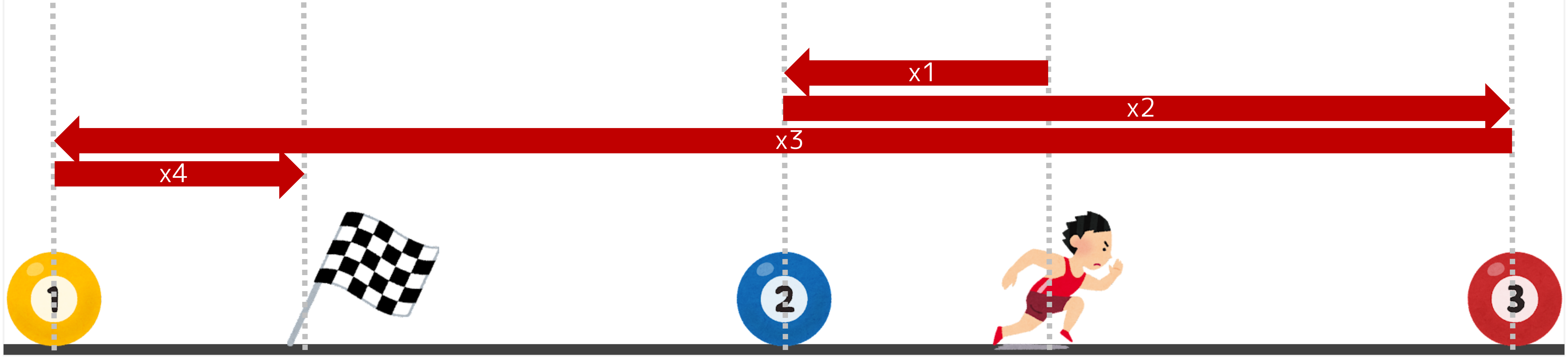
明らかに無駄になっている部分がある（丸の部分）

ポイント 1: ボールに向かって直接進むのが最適



最適な経路について

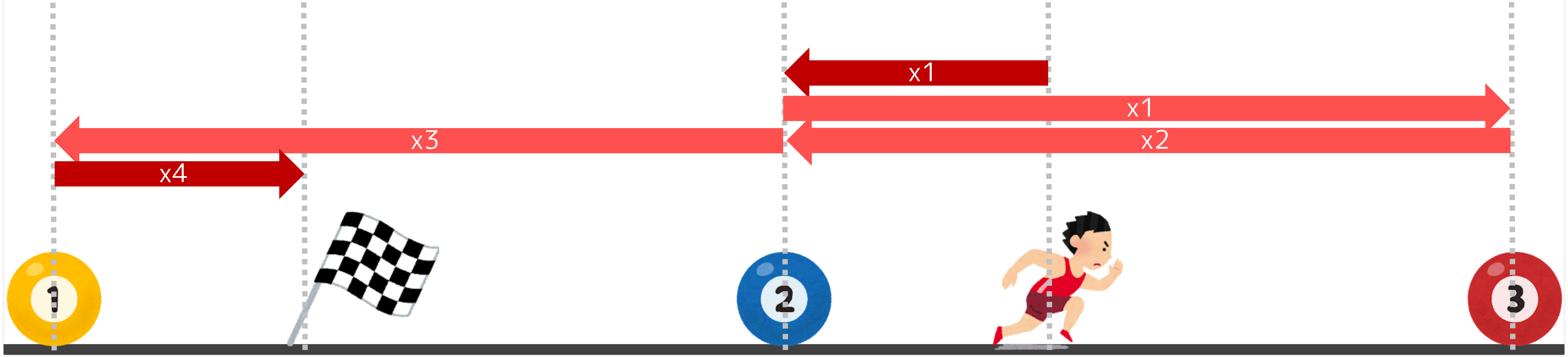
さっきの経路を改善したこんな経路はアリ？



最適な経路について

「2」のボールを先に取るよりも後に取る方が効率的！

ポイント 2: ボールは「最後に通る」ときに回収するのが最適

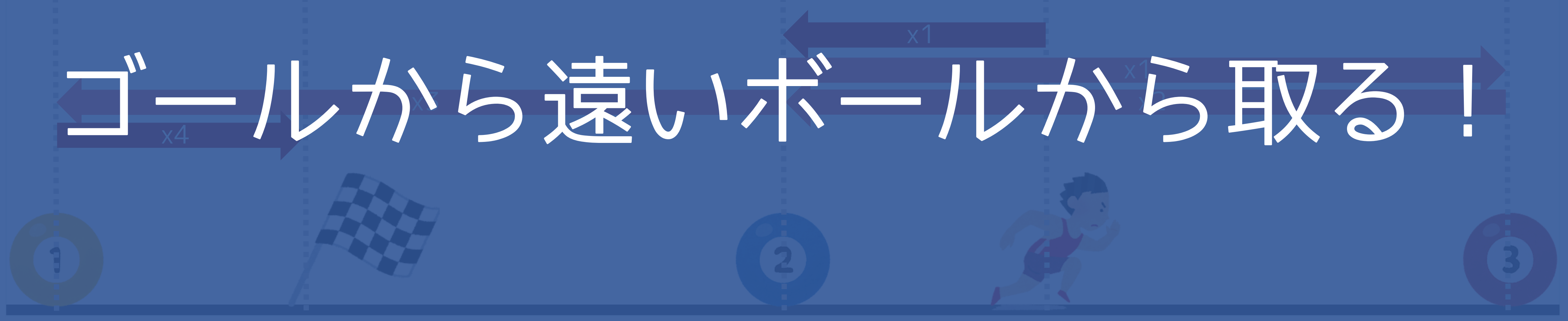


ポイント 2: ボールは「最後に通る」ときに回収するのが最適

重要な性質

同じサイドであれば最適解では

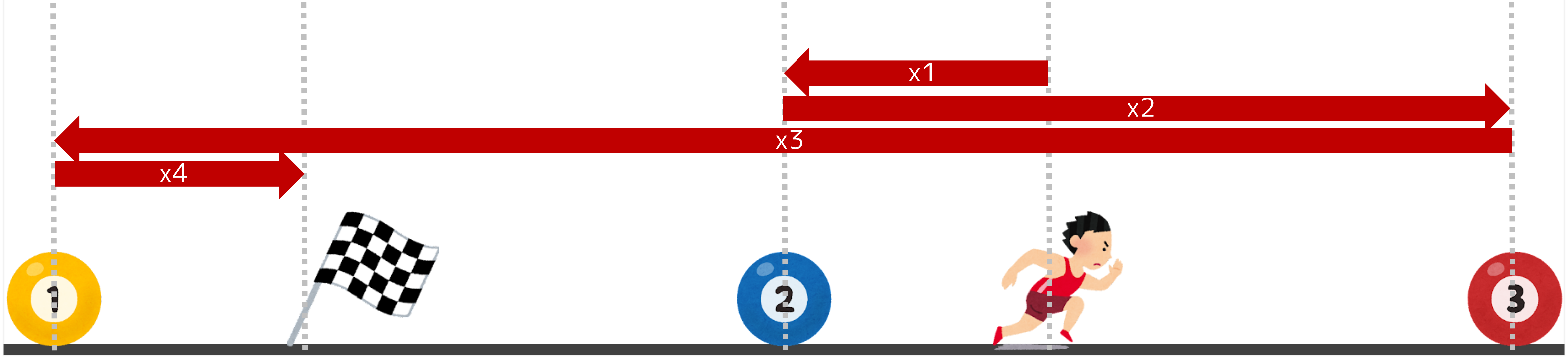
ゴールから遠いボールから取る！



最適な経路について

例：なぜ「2」を「3」より先に取ってはいけないのか？

理由：最後に通るタイミングは「3」よりも「2」の方が必ず遅いから



5 小課題 4, 5［累計 62 点］

小課題 3 のビット DP を思い出してみよう

- $dp[S][pos]$ を「現在回収したボールの集合が S であり、現在位置が X_{pos} であるときの、ここまでの最短時間」とする

Q. 本当に $2^N \times N$ 通り全部の (S, pos) の組み合わせを考える必要があるか？

5 小課題 4, 5［累計 62 点］

小課題 3 のビット DP を思い出してみよう

- $dp[S][pos]$ を「現在回収したボールの集合が S であり、現在位置が X_{pos} であるときの、ここまでの最短時間」とする

Q. 本当に $2^N \times N$ 通り全部の (S, pos) の組み合わせを考える必要があるか？

A. S = {1, 2, …, l, r, r+1, …, N} で pos が「l または r」だけ考えればよい！（理由：同じサイドならゴールから遠い順に取る）

※ ただし $X_1 \leq X_2 \leq \cdots \leq X_N$ とソートされているものとする

小課題 4，5［累計 62 点］

以下の DP を考える

- $dp[l][r][d]$: 既にボール $1,2,\dots,l$ およびボール $r,r+1,\dots,N$ を回収し、現在位置が X_l or X_r（それぞれ $d=0,1$）の状態になるまでの最短時間
- 計算量はクエリ当たり $O(N^2)$

小課題 6［累計 81 点］

小課題 6 では、N が 2000 以下だが、クエリがたくさん

目標

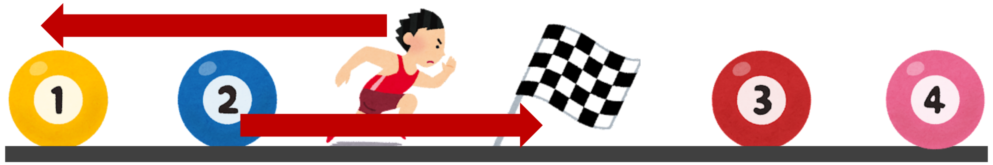
DP を適切に前計算 → 各クエリ計算量 O(1)

戦略

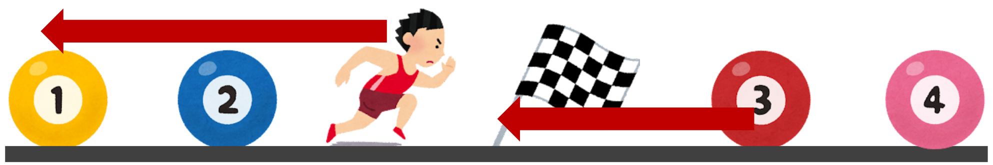
元々の DP には S, G の情報が入っているので、そうでない形にするために、S, G による解の変化を考える

小課題 6［累計 81 点］

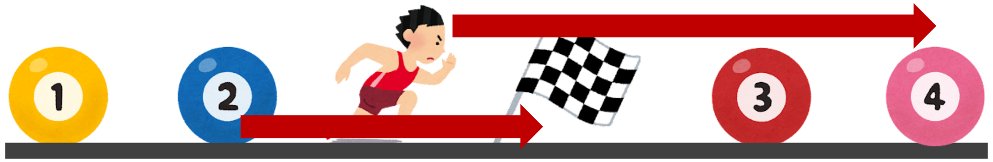
以下の 4 パターンの経路が考えられる（S, G によってどれかは変わる）



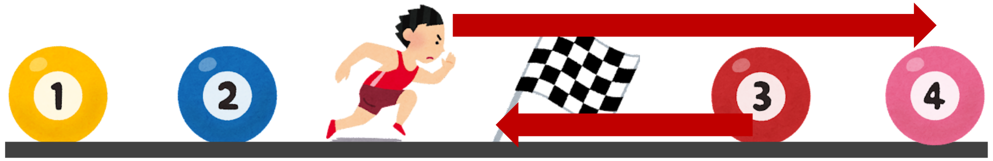
左端のボールを最初に取り、左からゴールする



左端のボールを最初に取り、右からゴールする



右端のボールを最初に取り、左からゴールする



右端のボールを最初に取り、右からゴールする

小課題 6［累計 81 点］

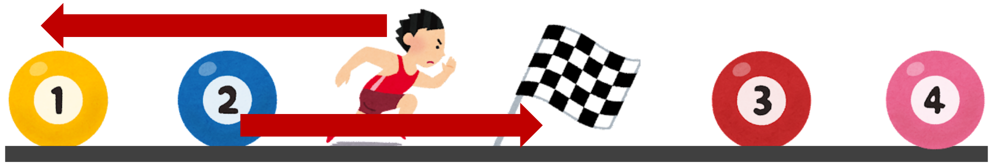
以下の DP を前計算することを考える。すると…？

- $dp_L[l][r][d]$: 左端のボールを取ってスタートするときの最短時間
- $dp_R[l][r][d]$: 右端のボールを取ってスタートするときの最短時間

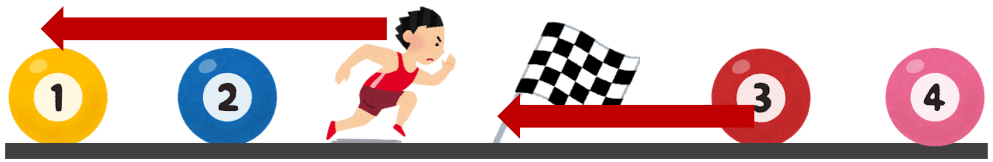
小課題 6［累計 81 点］

4 パターンの最短時間が以下のように求まる！

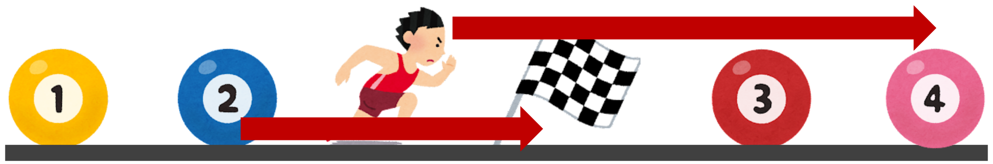
- $dp_L[l][r][d]$: 左端のボールを取ってスタートするときの最短時間
- $dp_R[l][r][d]$: 右端のボールを取ってスタートするときの最短時間



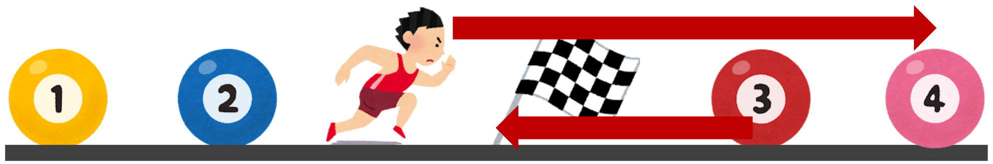
最短時間は $dp_L[2][3][0] + |S - X_1| + 5|G - X_2|$



最短時間は $dp_L[2][3][1] + |S - X_1| + 5|G - X_3|$



最短時間は $dp_R[2][3][0] + |S - X_4| + 5|G - X_2|$



最短時間は $dp_R[2][3][1] + |S - X_4| + 5|G - X_3|$

6 小課題 6［累計 81 点］

4 パターンの最短時間が以下のように求まる！

- $dp_L[l][r][a]$: 左端のボールを取ってスタートするときの最短時間
- $dp_R[l][r][a]$: 右端のボールを取ってスタートするときの最短時間

全体計算量 $O(\underbrace{N^2}_{\text{前計算の DP}} + \underbrace{Q \log N}_{\text{ゴールの位置の二分探索}})$ で解ける

※ 二分探索の代わりに、各場所につき「どのボールの間か」を前計算すると、計算量 $O(N^2 + Q + L)$ になる

最短時間は $dp_L[2][3][0] + |S - X_1| + 5|G - X_2|$

最短時間は $dp_L[2][3][1] + |S - X_1| + 5|G - X_3|$

最短時間は $dp_R[2][3][0] + |S - X_4| + 5|G - X_2|$

最短時間は $dp_R[2][3][1] + |S - X_4| + 5|G - X_3|$

7 小課題 7［累計 100 点］

小課題 7 では、N が 500000 以下

制約から考えれば、例えば計算量 O(N log N) とかで解く必要がある

7 小課題 7［累計 100 点］

小課題 6 では、N が 500000 以下

制約から考えれば、計算量 O(N log N) とかで解く必要がある

残念ながら、O(N log N) で
解くのは難しい

※ 解けるかもしれないが、仮にそうだとしても相当難易度が高いと思われる

本当に全ての制約を使い果たしたのか？

制約

- $1 \leqq N \leqq 500\,000$.
- $1 \leqq L \leqq 500\,000$.
- $0 \leqq X_i \leqq L$ $(1 \leqq i \leqq N)$.
- $1 \leqq Q \leqq 500\,000$.
- $0 \leqq S_j \leqq L$ $(1 \leqq j \leqq Q)$.
- $0 \leqq G_j \leqq L$ $(1 \leqq j \leqq Q)$.
- $1 \leqq T_j \leqq 500\,000$ $(1 \leqq j \leqq Q)$.
- 入力される値はすべて整数である．

7 小課題 7 [累計 100 点]

本当に全ての制約を使い果たしたのか？

制約

- $1 \leqq N \leqq 500\,000$.
- $1 \leqq L \leqq 500\,000$.
- $0 \leqq X_i \leqq L$ $(1 \leqq i \leqq N)$.
- $1 \leqq Q \leqq 500\,000$.
- $0 \leqq S_j \leqq L$ $(1 \leqq j \leqq Q)$.
- $0 \leqq G_j \leqq L$ $(1 \leqq j \leqq Q)$.
- $1 \leqq T_j \leqq 500\,000$ $(1 \leqq j \leqq Q)$.
- 入力される値はすべて整数である.

小課題 7［累計 100 点］

Q. 「T が 500000 以下」だと何か変わるのか？

小課題 7［累計 100 点］

Q. 「T が 500000 以下」だと何か変わるのか？

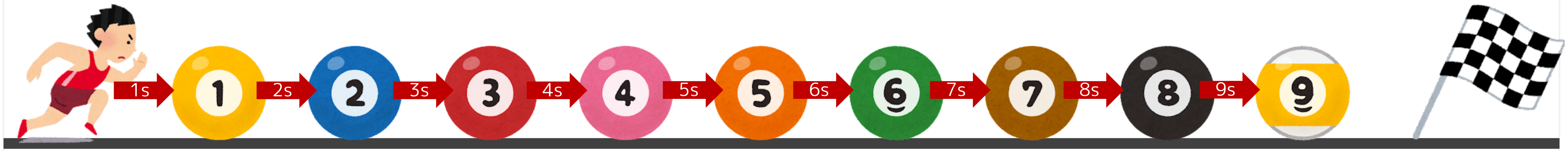
A. たくさんの種類の座標にボールが落ちていた場合、それを T 秒以内に全部回収するのは不可能になる！

小課題 7［累計 100 点］

例えば、下図の場合、9 個のボールを回収するのには

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 44$$

秒が必要



小課題 7［累計 100 点］

一般に、K 種類の場所にボールが落ちていた場合…

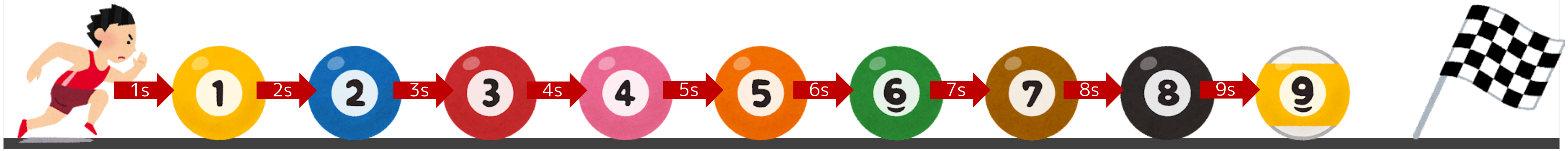
$$1 + (2+1) + (3+1) + \cdots + (K+1)$$

秒が必要

最初のボールを
取る時間

次のボール
まで動く時間

ボールを
取る時間



7 小課題 7［累計 100 点］

一般に、K 種類の場所にボールが落ちていた場合…

ボールの場所が 999 種類以上なら

答えは全部「No」！！！

小課題 7［累計 100 点］

小課題 6 の解法を、同じ場所にあるものをまとめて考えた「重み付き」の問題として実装する（同じ座標なら一気に取るのが最適なことに注意）

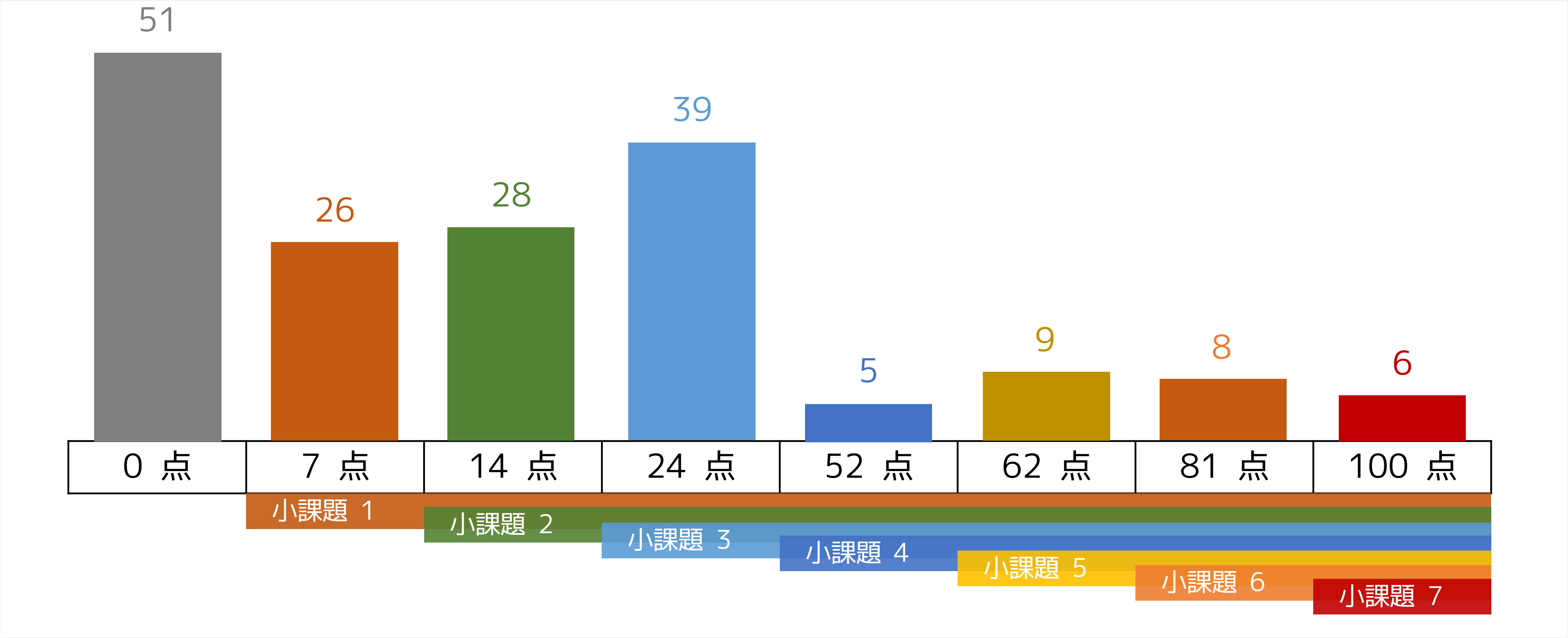
ボールの場所が K 種類ある場合、計算量は $O(N+Q+K^2+L)$

ここで $K=O(\sqrt{\max T})$ なので、全体計算量は…

$$\boldsymbol{O(N+Q+\max T)}$$

※ ここで $L \le \max T$ とみなしてよい。理由は、最左から最右のボールまで行くのに T 分かかるため。

得点分布


51
26
28
39
5
9
8
6
0 点
7 点
14 点
24 点
52 点
62 点
81 点
100 点
小課題 1
小課題 2
小課題 3
小課題 4
小課題 5
小課題 6
小課題 7