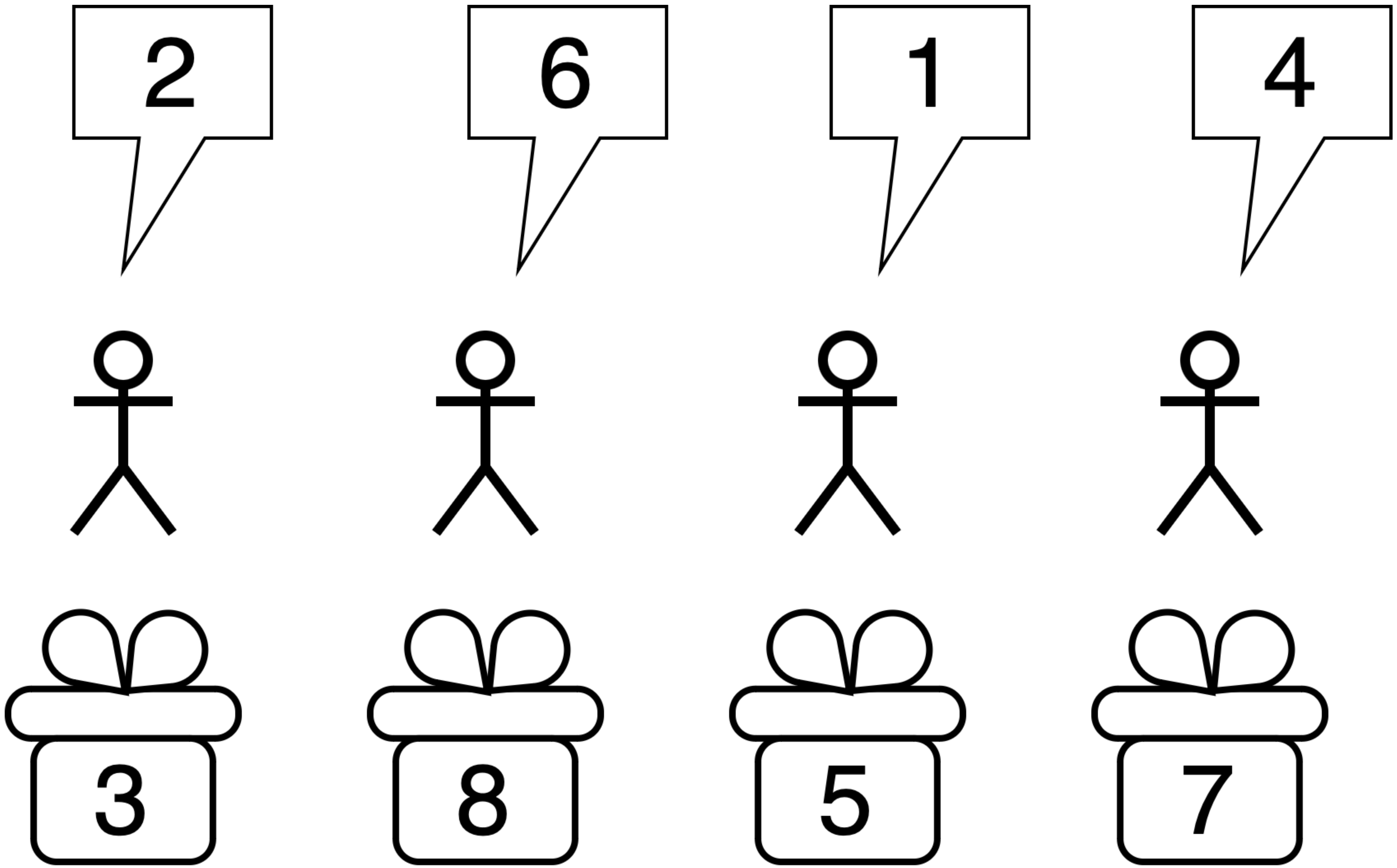
プレゼント交換　解説

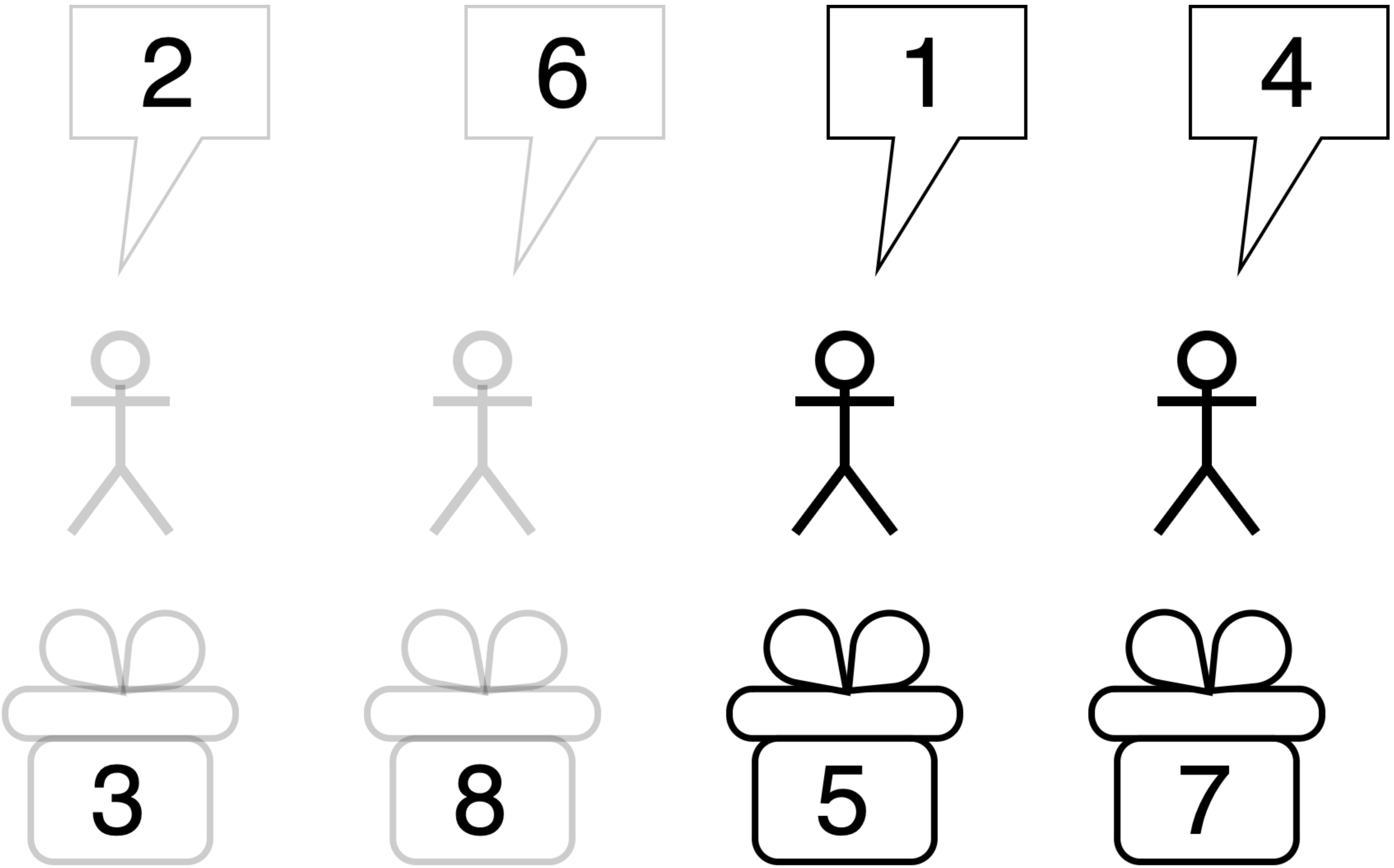
JOI'23 本選 4

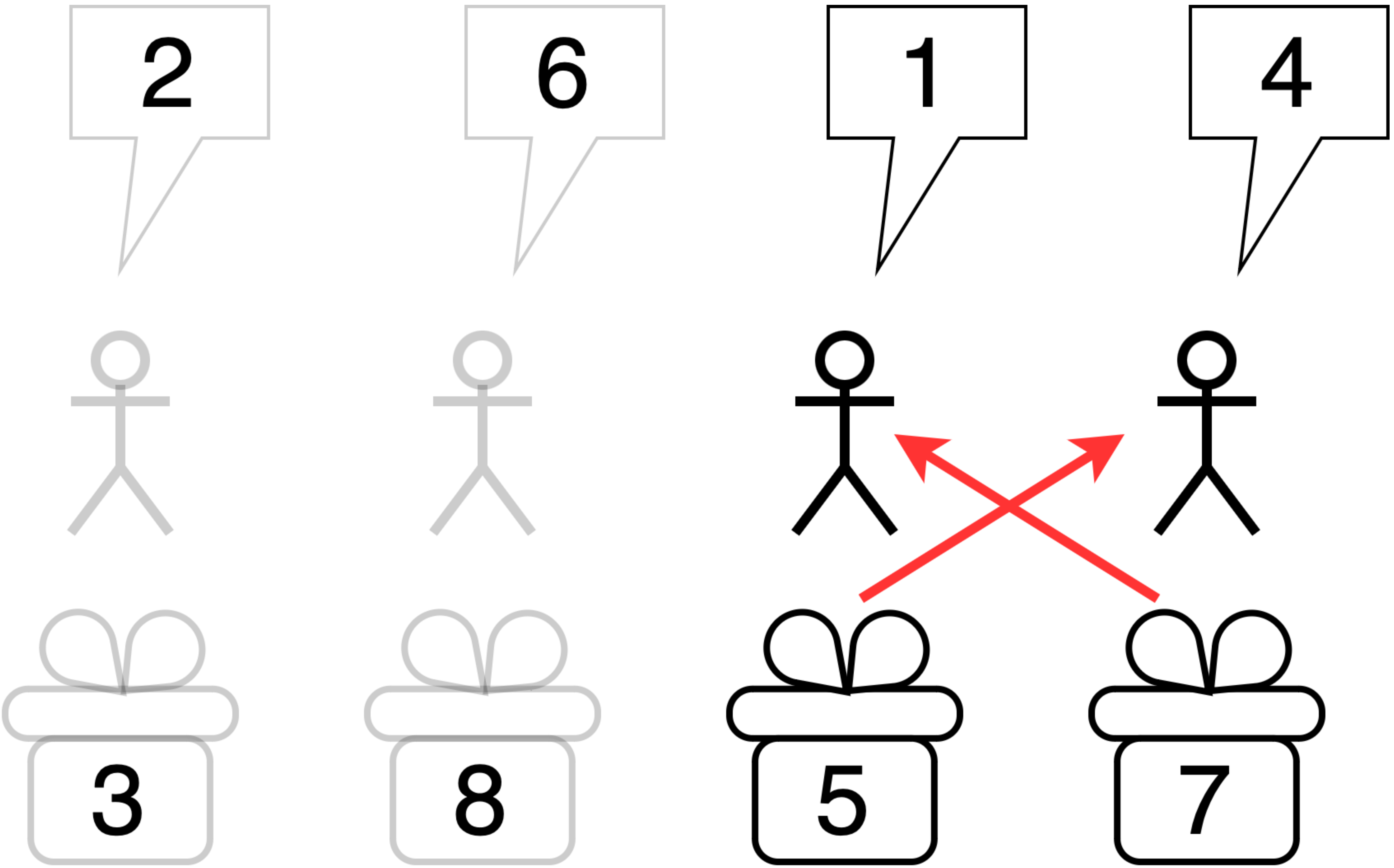
渡邉 雄斗 (yuto1115)

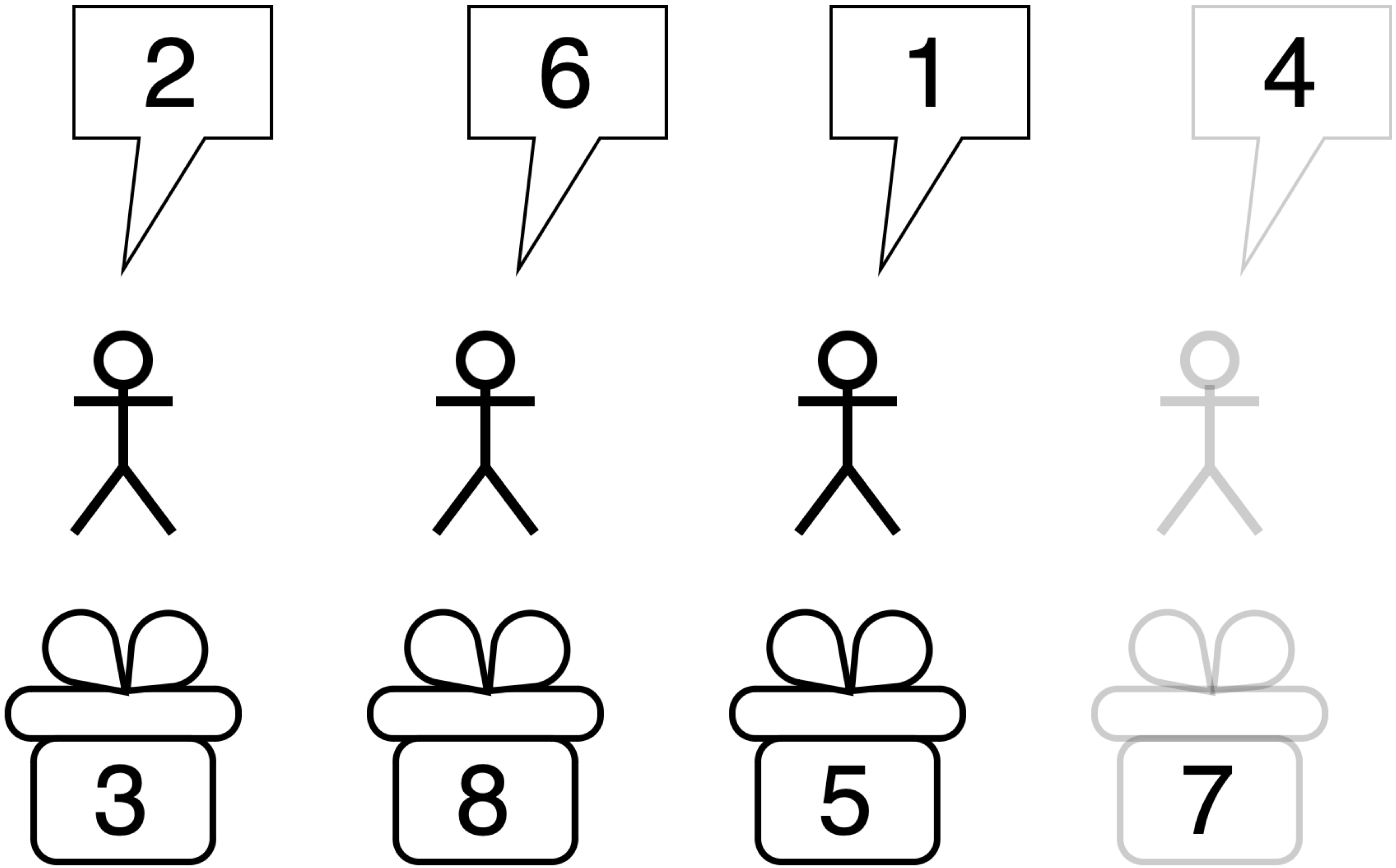
問題概要

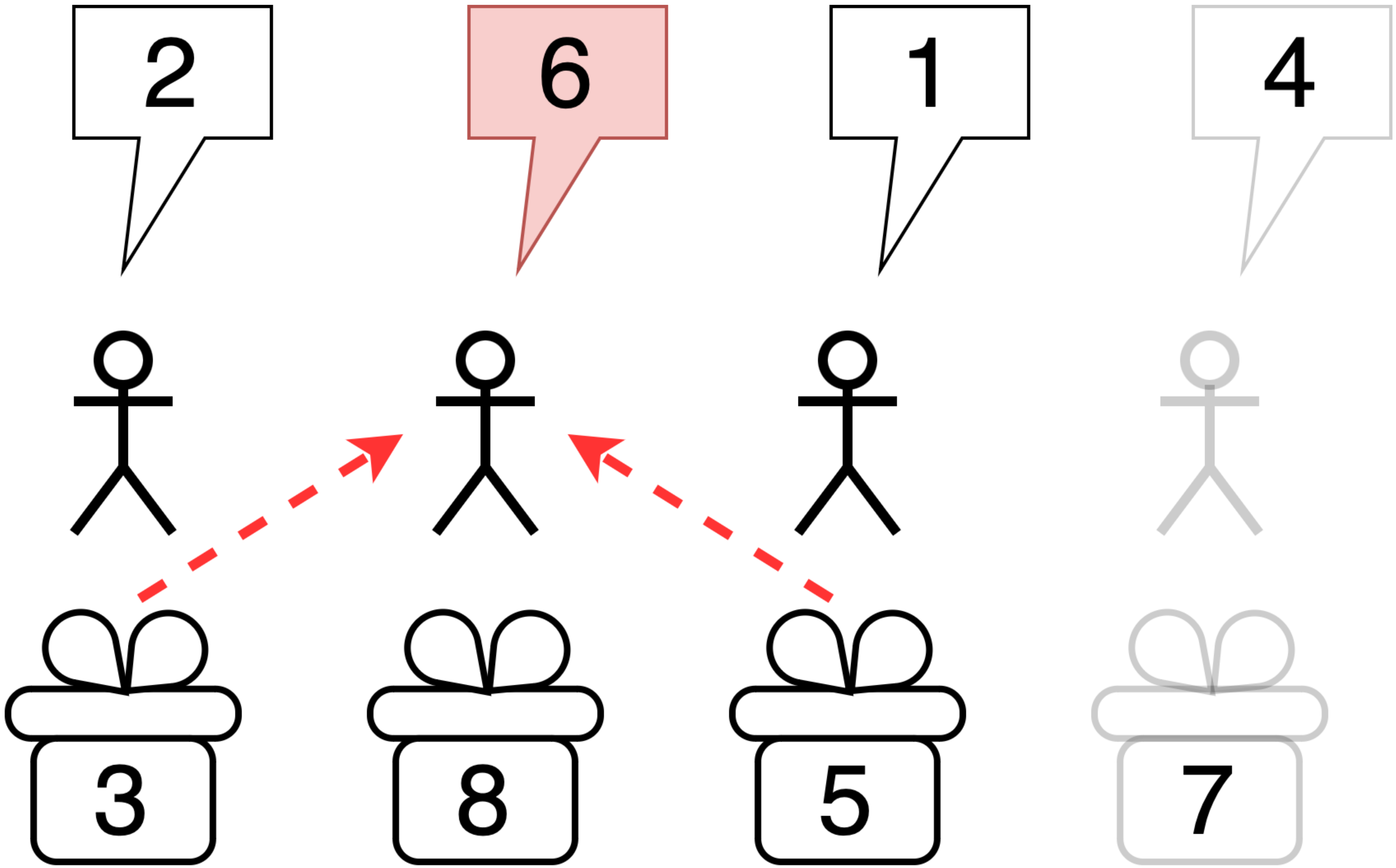
- N 人の生徒がプレゼントを持っている．生徒 i のプレゼントの価値は A_i .
- 生徒 i は価値 B_i $(< A_i)$ 以上のプレゼントしか受け取りたくない.
- Q 個のグループがある．j 個目のグループは生徒 $L_j, L_j+1, \ldots, R_j$ からなる.
- それぞれのグループについて，そのグループ内でプレゼント交換できるか判定せよ.
  - 価値 B_i 未満のプレゼントや，自分自身のプレゼントは受け取れない.

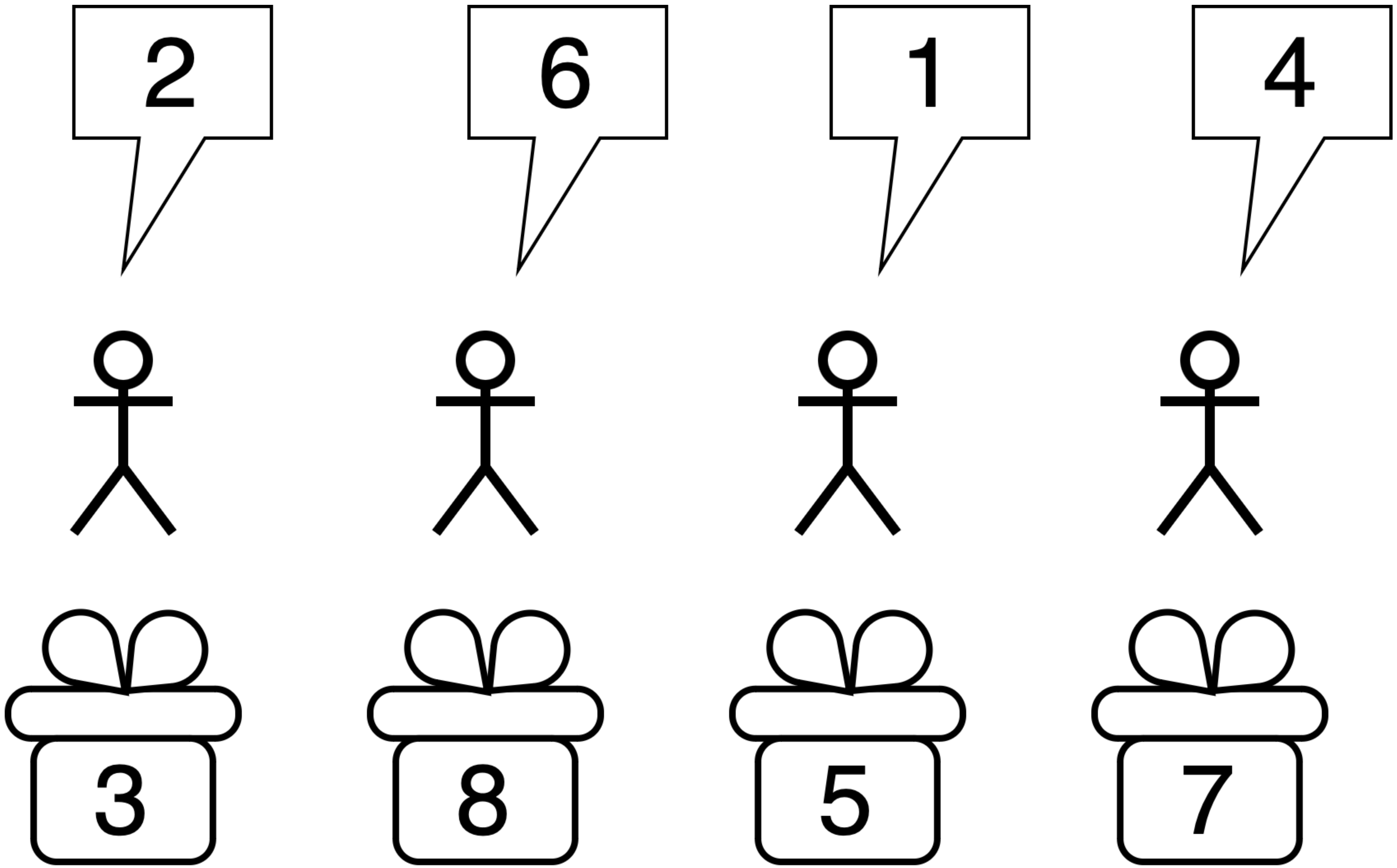

2
6
1
4
3
8
5
7

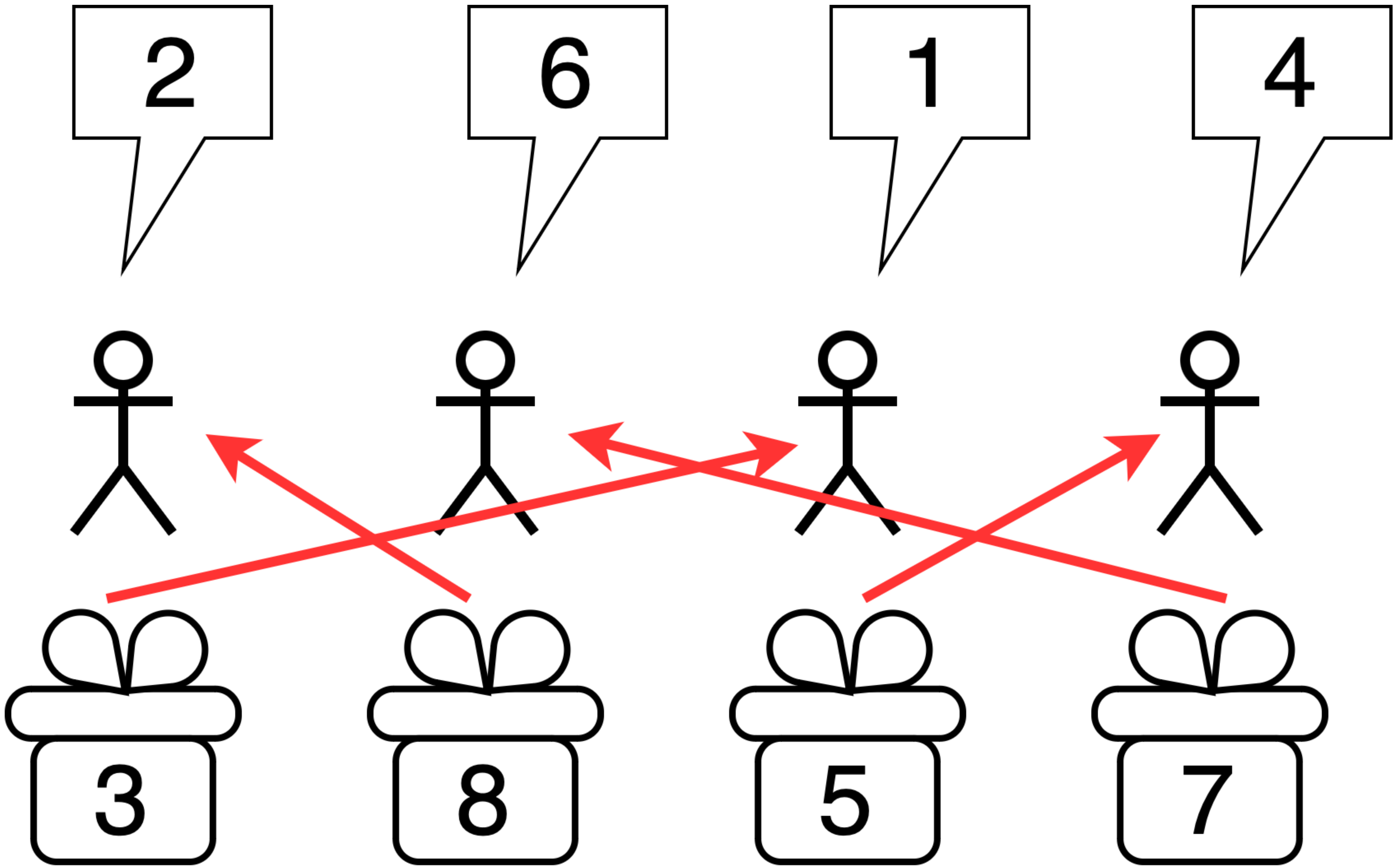

2
6
1
4
3
8
5
7


2
6
1
4
3
8
5
7


2
6
1
4
3
8
5
7


2
6
1
4
3
8
5
7


2
6
1
4
3
8
5
7


2
6
1
4
3
8
5
7

小課題 1 (4 点)

- $N \leqq 10,\ \ Q \leqq 10$
- 各グループについて，(グループの人数)! 通りある交換方法を全部試し，
  条件を満たすものがあるか判定する.
- 計算量 $O(QN!)$

小課題２ (5 点, 累計 9 点)

- $N \leqq 18, \quad Q \leqq 10$
- 各グループについて，bit DP を用いて交換方法を効率的に全探索する.
- 計算量 $O(Q2^N)$

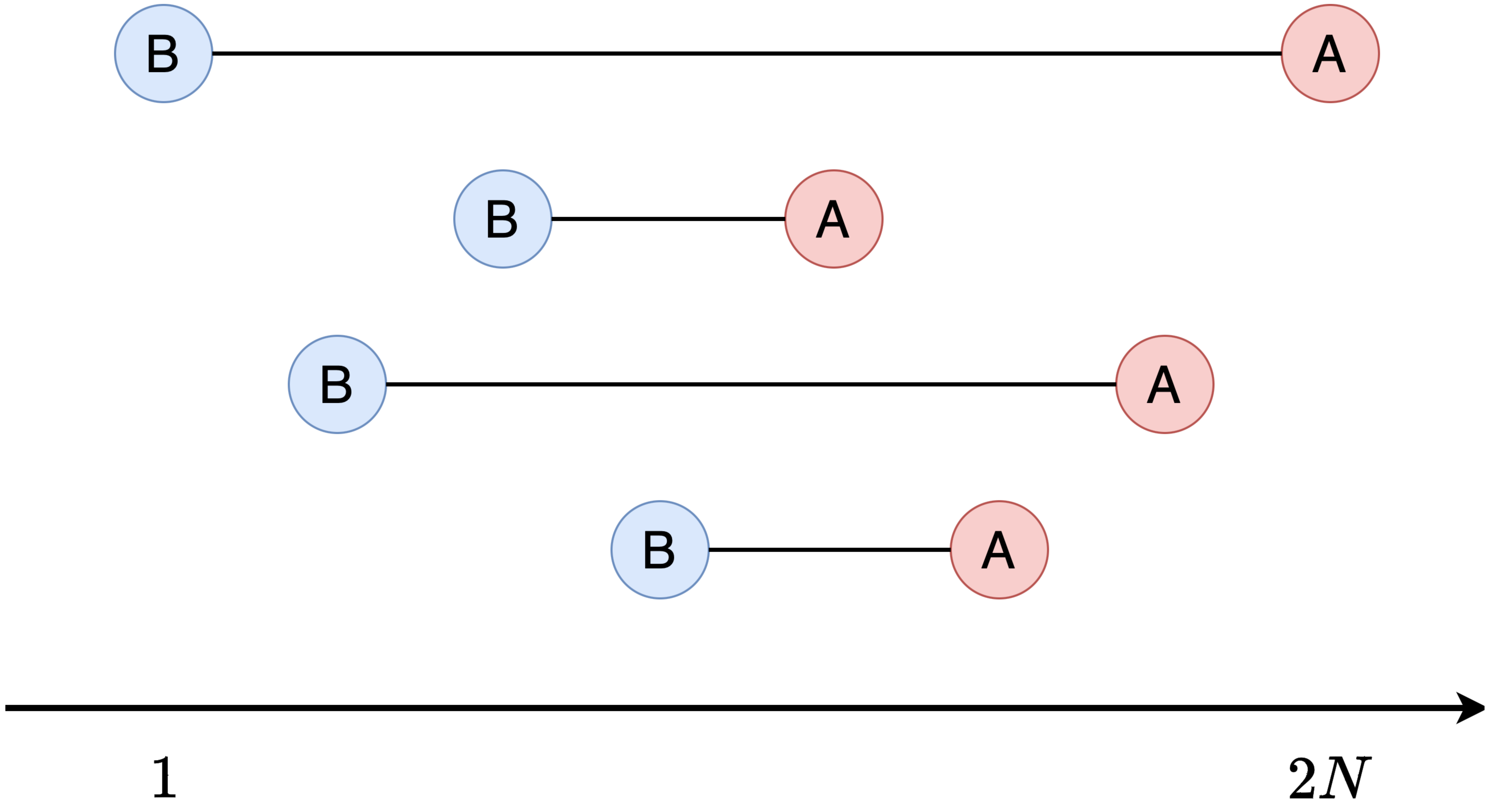
小課題３ (10 点)

- $N \leqq 10^5, \ \ A_1 \geqq 2N-2, \ \ B_1 = 1, \ \ Q = 1, \ \ L_1 = 1, \ \ R_1 = N$
- グループは，N 人全員からなる 1 つだけ
- N 人全員でプレゼント交換できるかを $O(N)$ くらいで判定したい
- $A_1 \geqq 2N-2, \ \ B_1 = 1$ ← だから何？

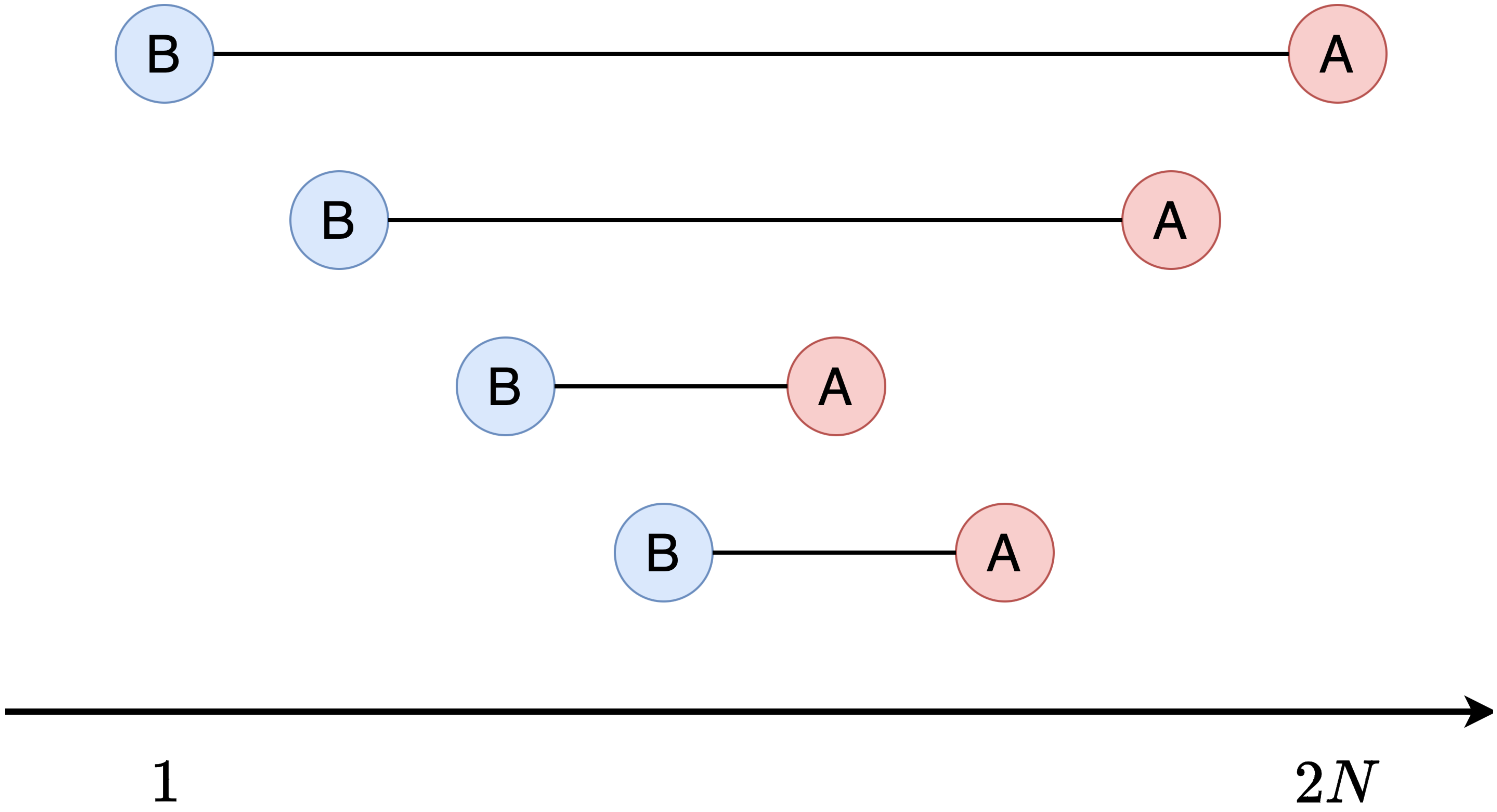
小課題３ (10 点)

- $A_1 \geqq 2N - 2, \ \ B_1 = 1 \ \leftarrow$ だから何？
- A_1 としてあり得る値は $2N - 2, 2N - 1, 2N$ のみ
- まずは $A_1 = 2N$ の場合を考えてみる

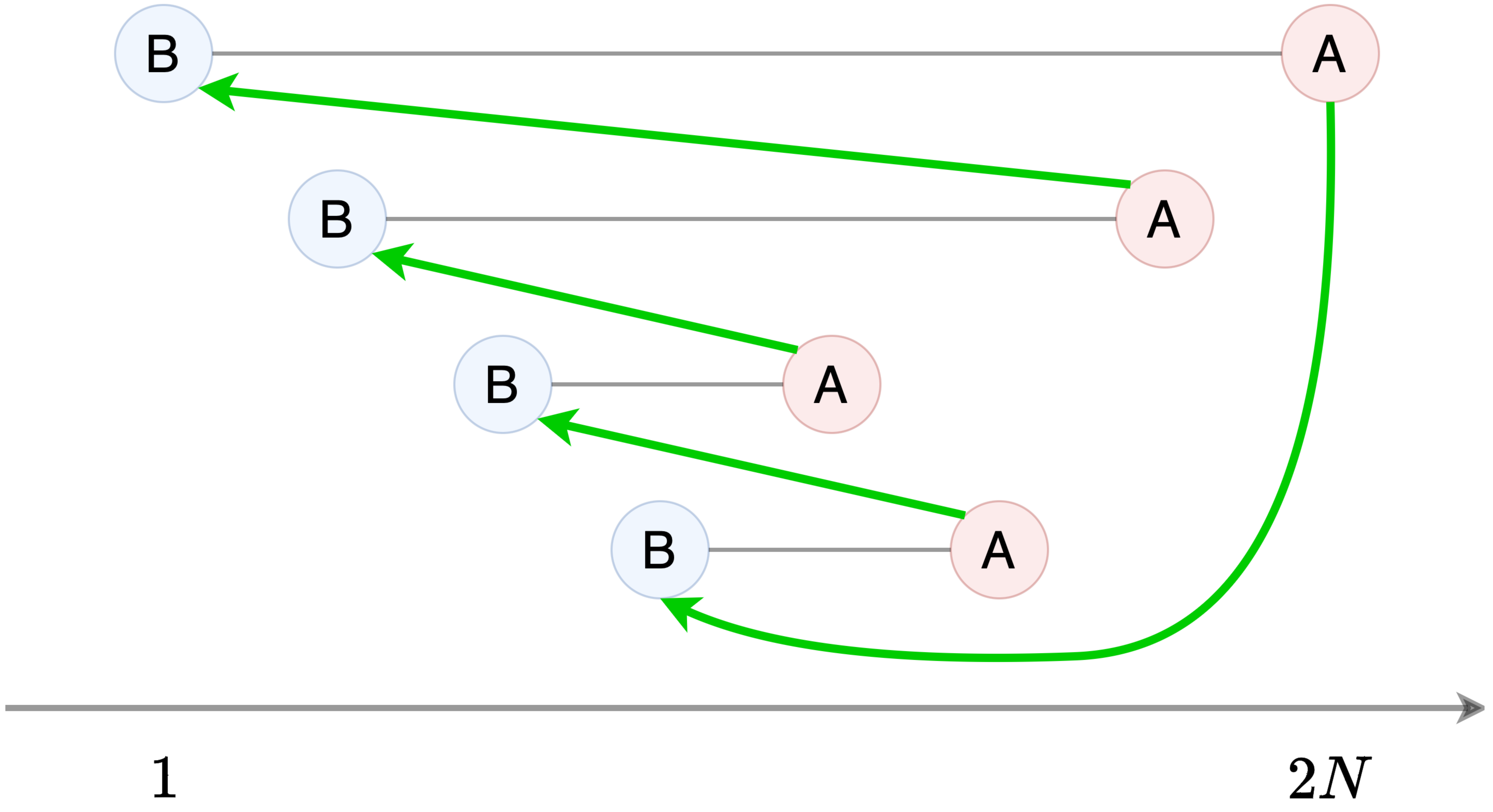
図の導入



B の昇順に並び替え



1 個ずつずらして渡す



小課題３ (10 点)

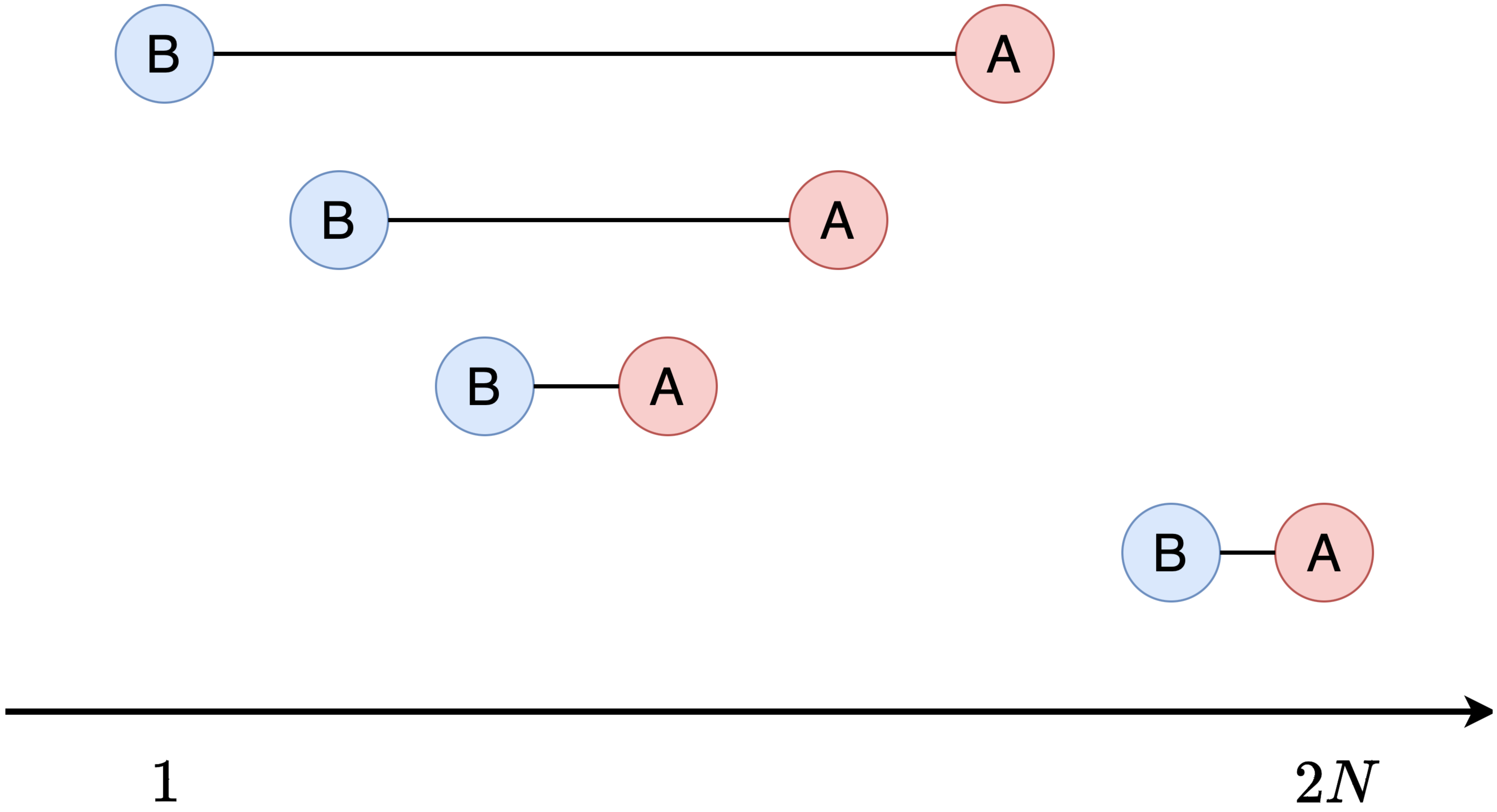
- 「B_i の昇順にソートして，１個ずつずらして渡す」戦略をとれば，
  B_i の最大値が A_1 より小さいとき，必ずプレゼント交換可能
- これは $A_1 \geqq 2N - 1$ ならば常に成立する
- $A_1 = 2N - 2$ のときは？
  - $(A, B) = (2N, 2N - 1)$ なるペアが存在するときに限り不成立
  - このとき，明らかにプレゼント交換不可能

小課題３ (10 点)

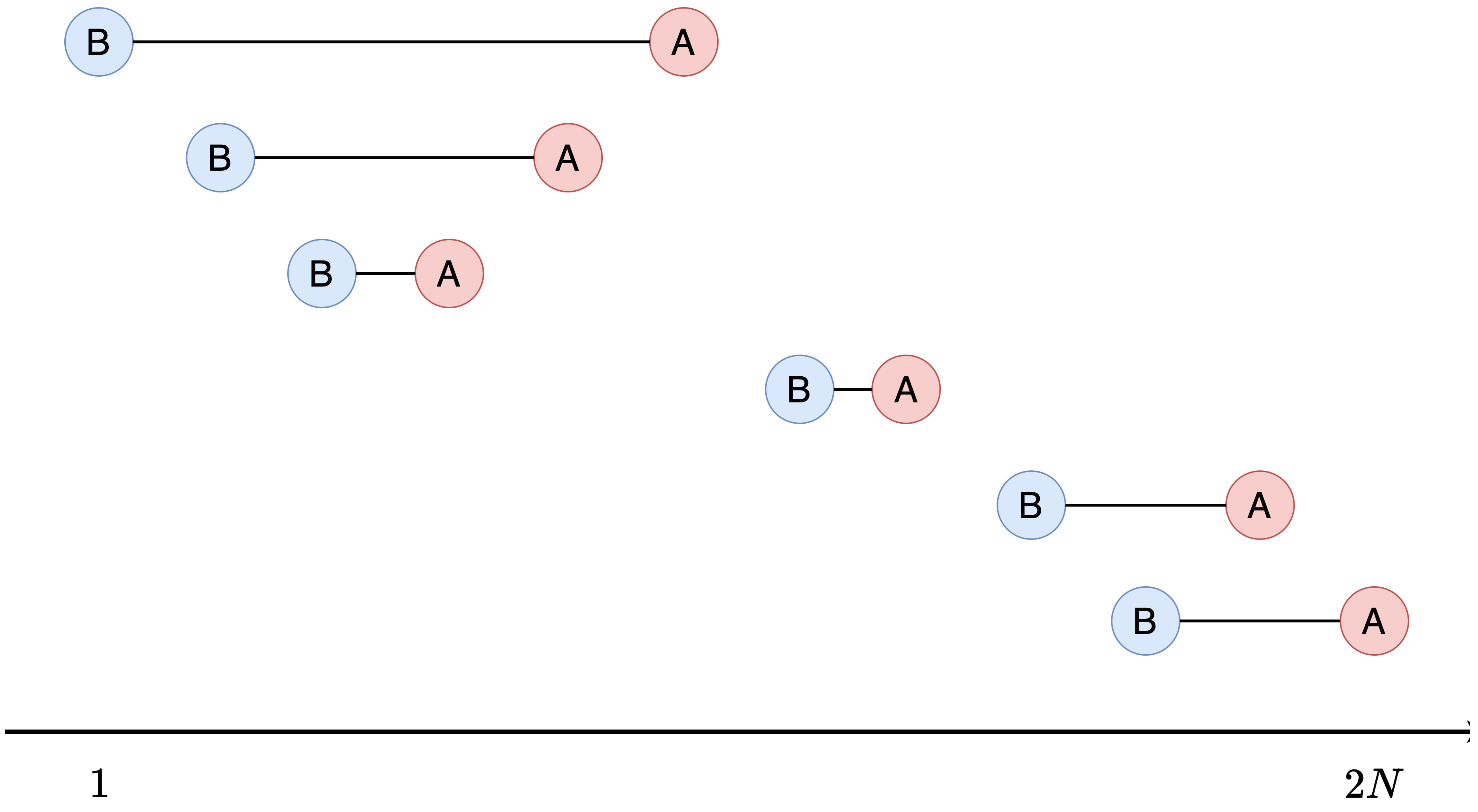
- よって，$(A, B) = (2N, 2N - 1)$ なるペアが存在するか探せばいい
- 計算量 $O(N)$

もっと一般化できないか？

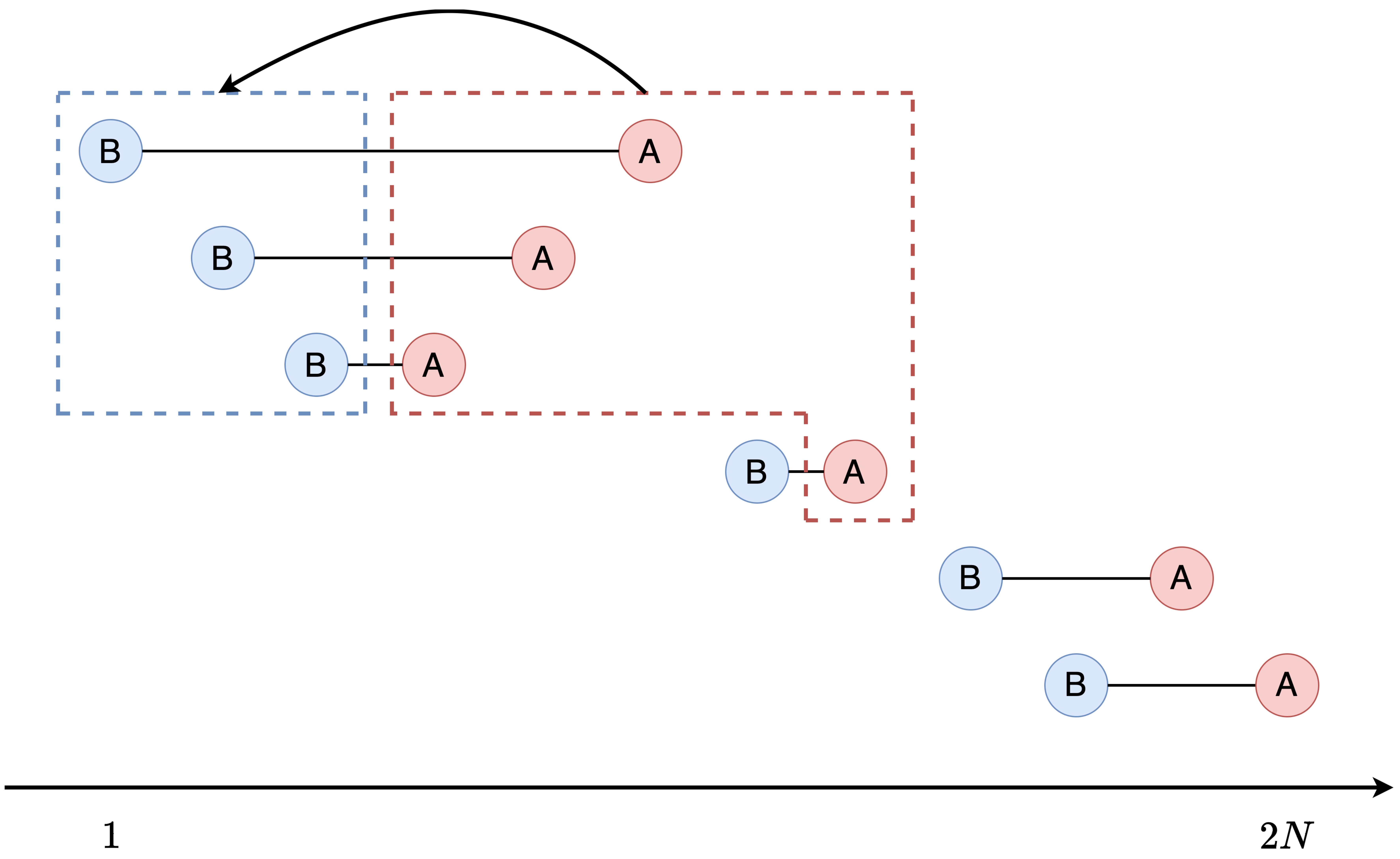
ダメなパターン



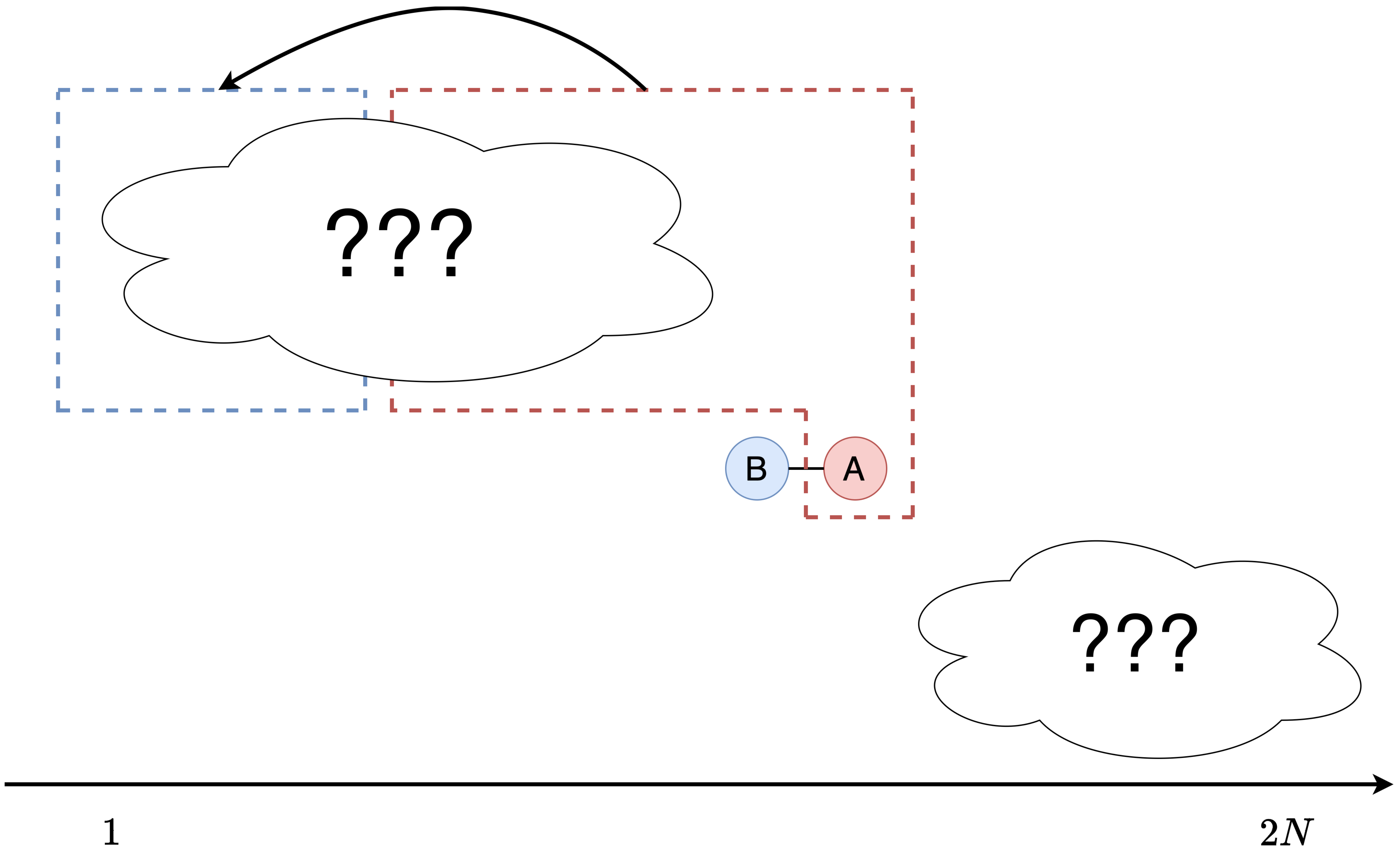
これはどうか？



やっぱりダメ



もっと一般的にこれはダメ



つまり

- ある区間を境に「それより完全に左にある区間」「完全に右にある区間」に二分されてしまう場合，プレゼント交換は不可能
- 言い換えると，どの区間も，他のどれかしらの区間と共通部分を持つ必要がある
- 実は十分

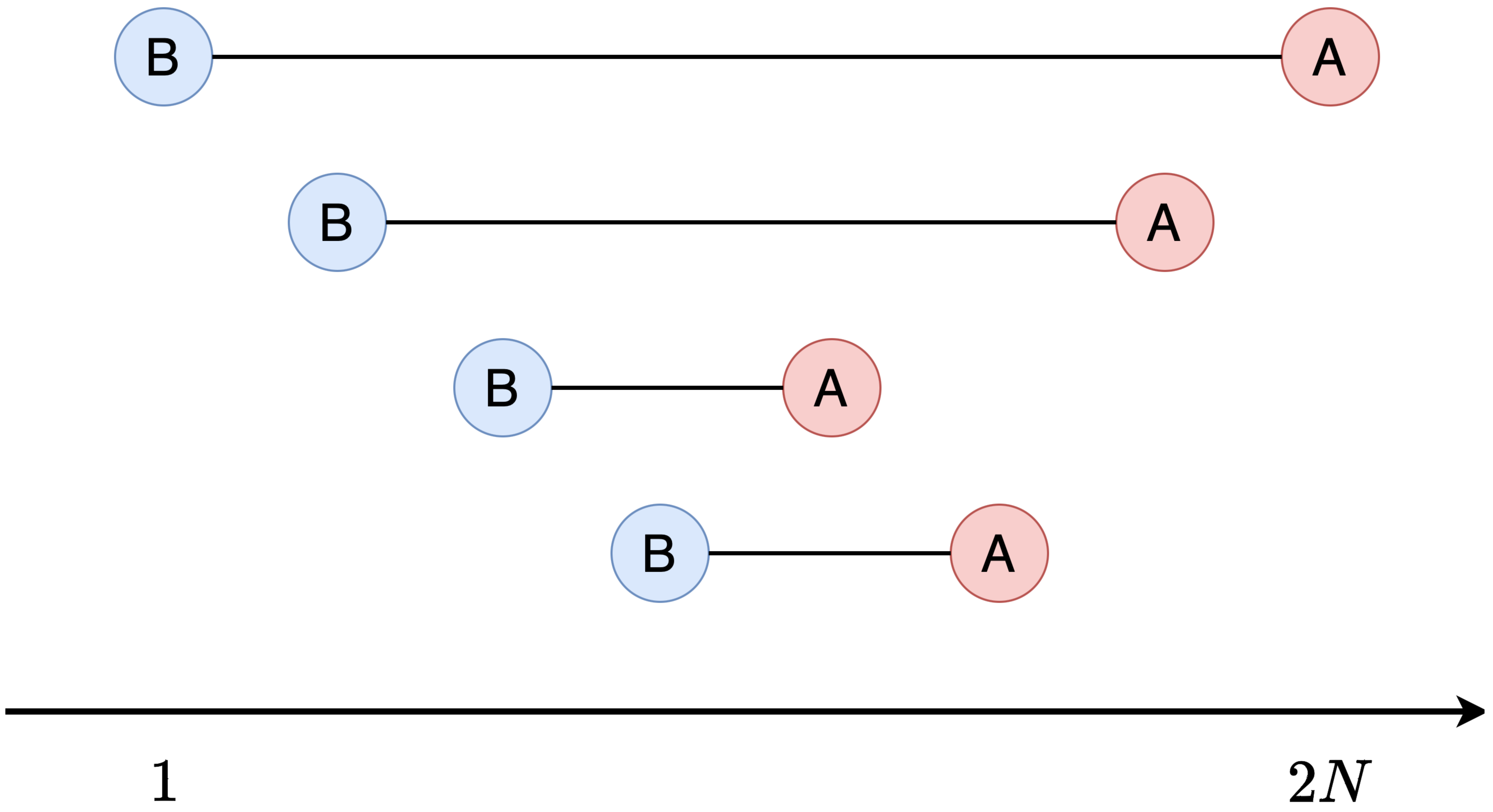
証明

1. マッチングと捉えて Hall の結婚定理を適用
    - 知識が必要なので，詳細略
    - 証明に使えるだけでなく，最初から Hall で考えると自然にこの条件が出てくる
2. 貪欲法を用いる
    - どの区間も他のどれかしらの区間と共通部分を持つとき，
      実際にプレゼント交換をする方法を構築できればよい．
    - 正しい貪欲法を用いれば，可能

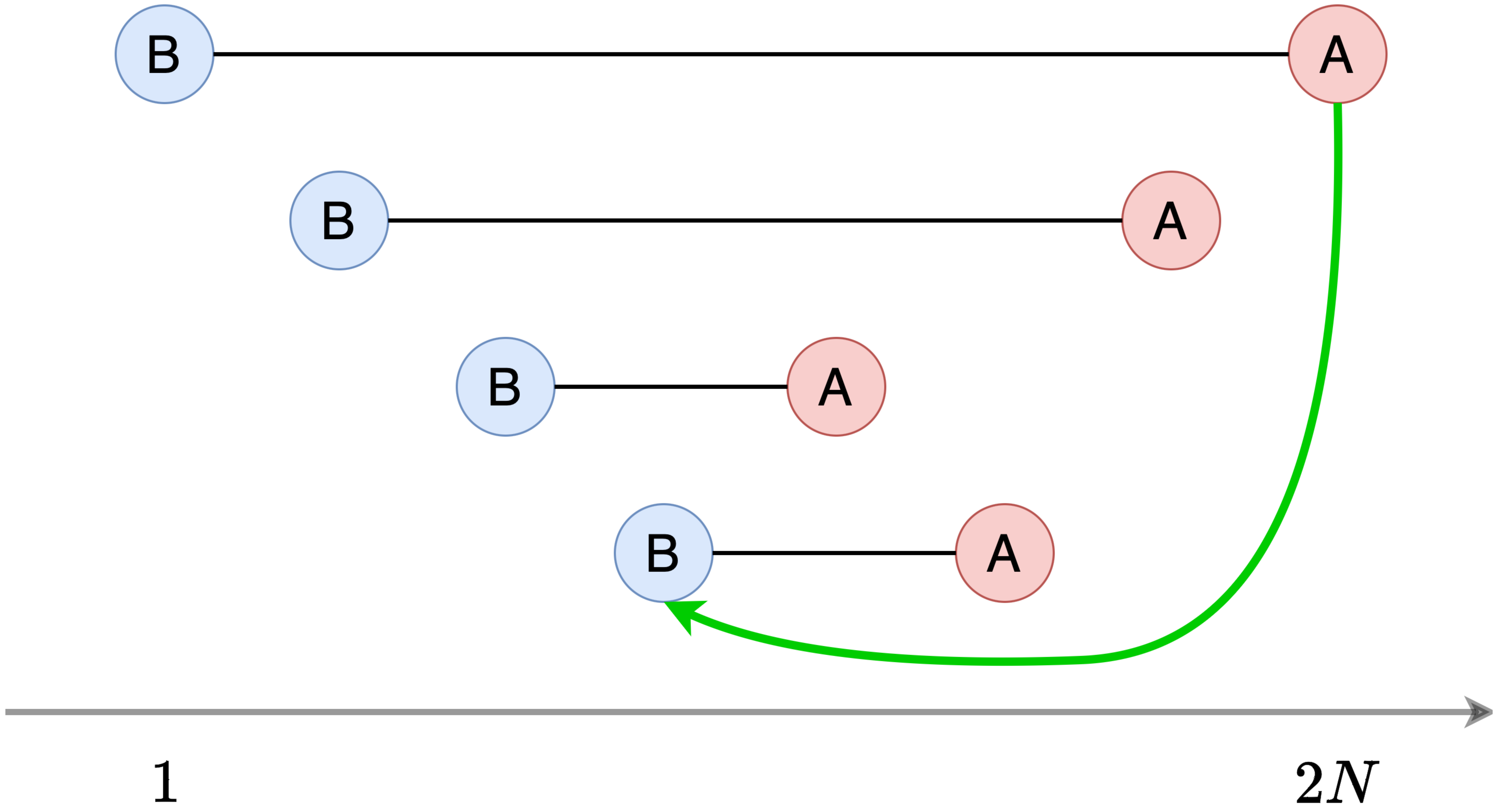
正しい貪欲法

- グループは N 人の生徒全員からなり，$B_1 < B_2 < \ldots < B_N$ が成り立つと仮定する.
  - そうでなければソート等によって適切に変形する.
- $i = 1, 2, \ldots, N$ の順に以下を行う：
  - 生徒 i のプレゼントを受け取ることができ，まだ誰のプレゼントを受け取っていない人のうち，B_i が最も大きい人を選んで生徒 i のプレゼントを渡す.
    - そもそもそんな人が 1 人もいないなら，プレゼント交換は不可能.

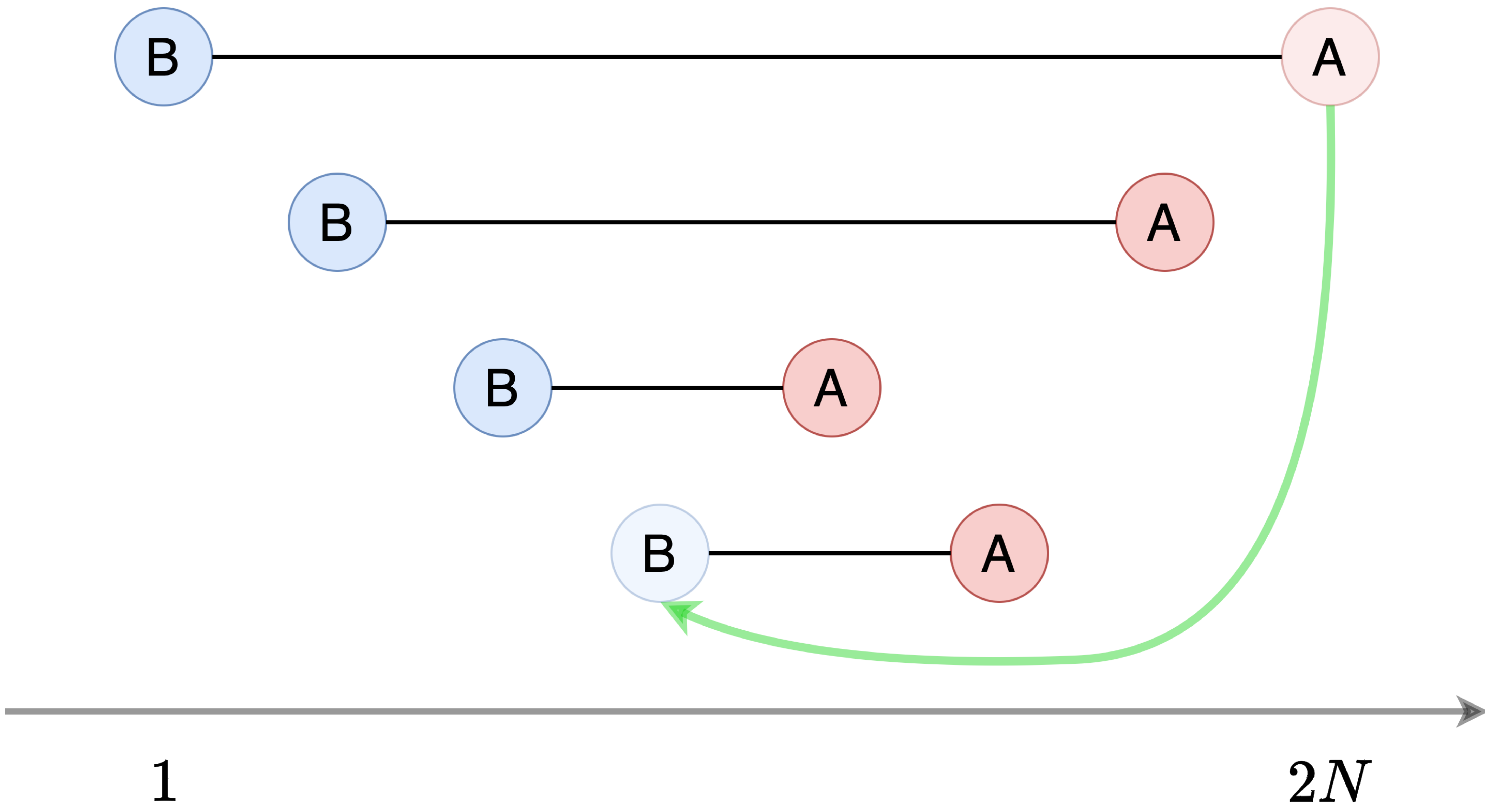
正しい貪欲法



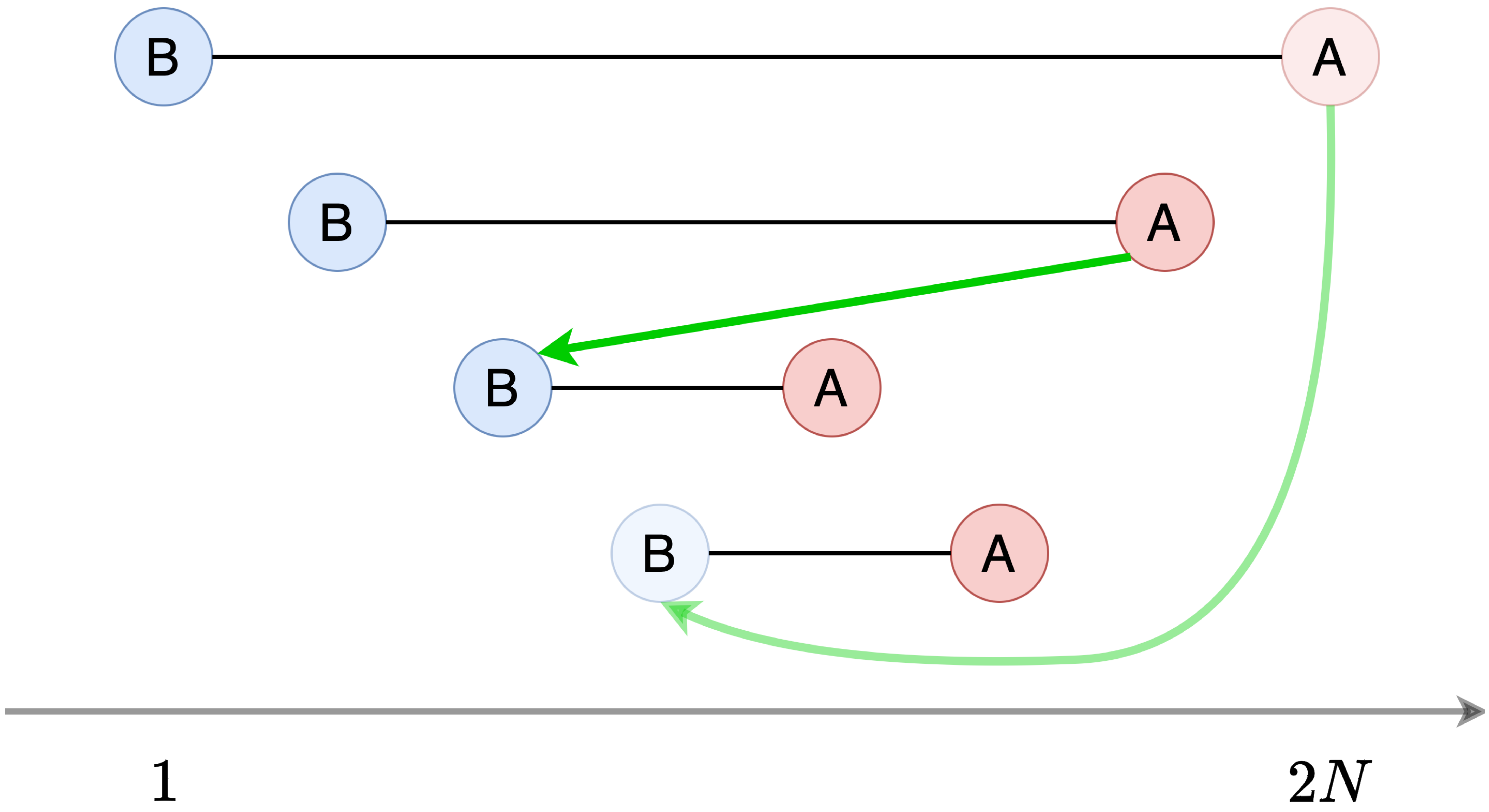
正しい貪欲法



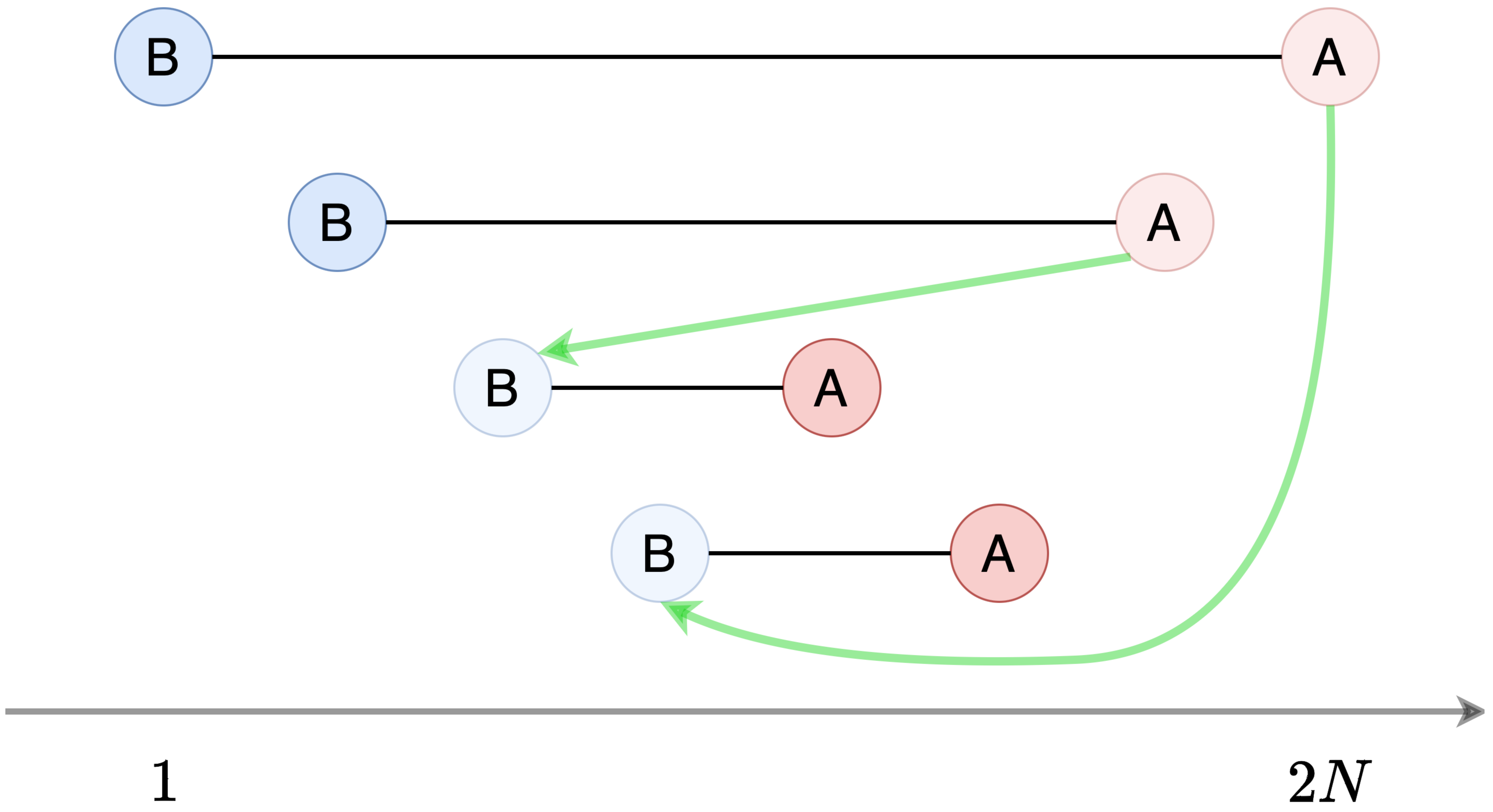
正しい貪欲法



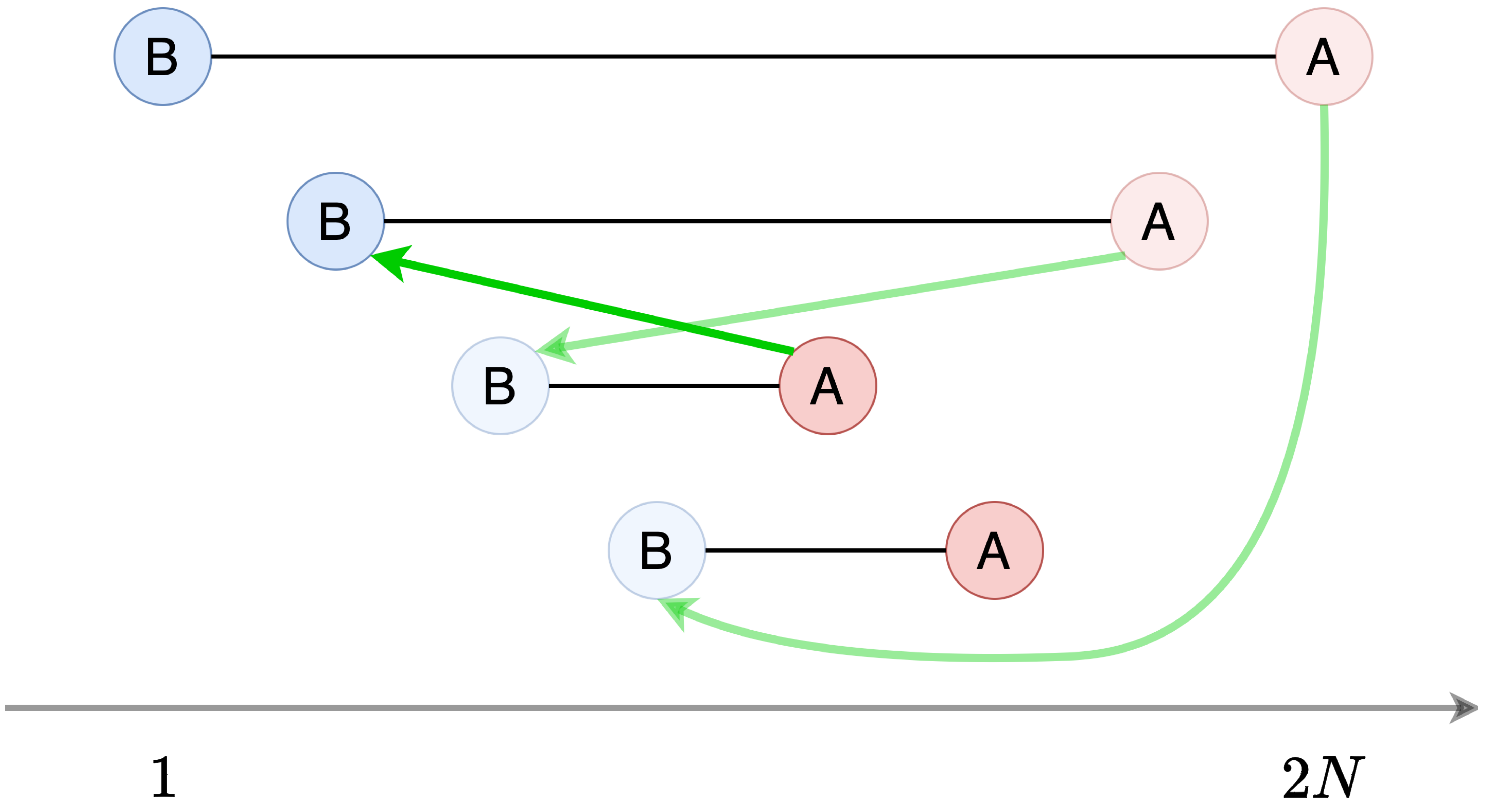
正しい貪欲法



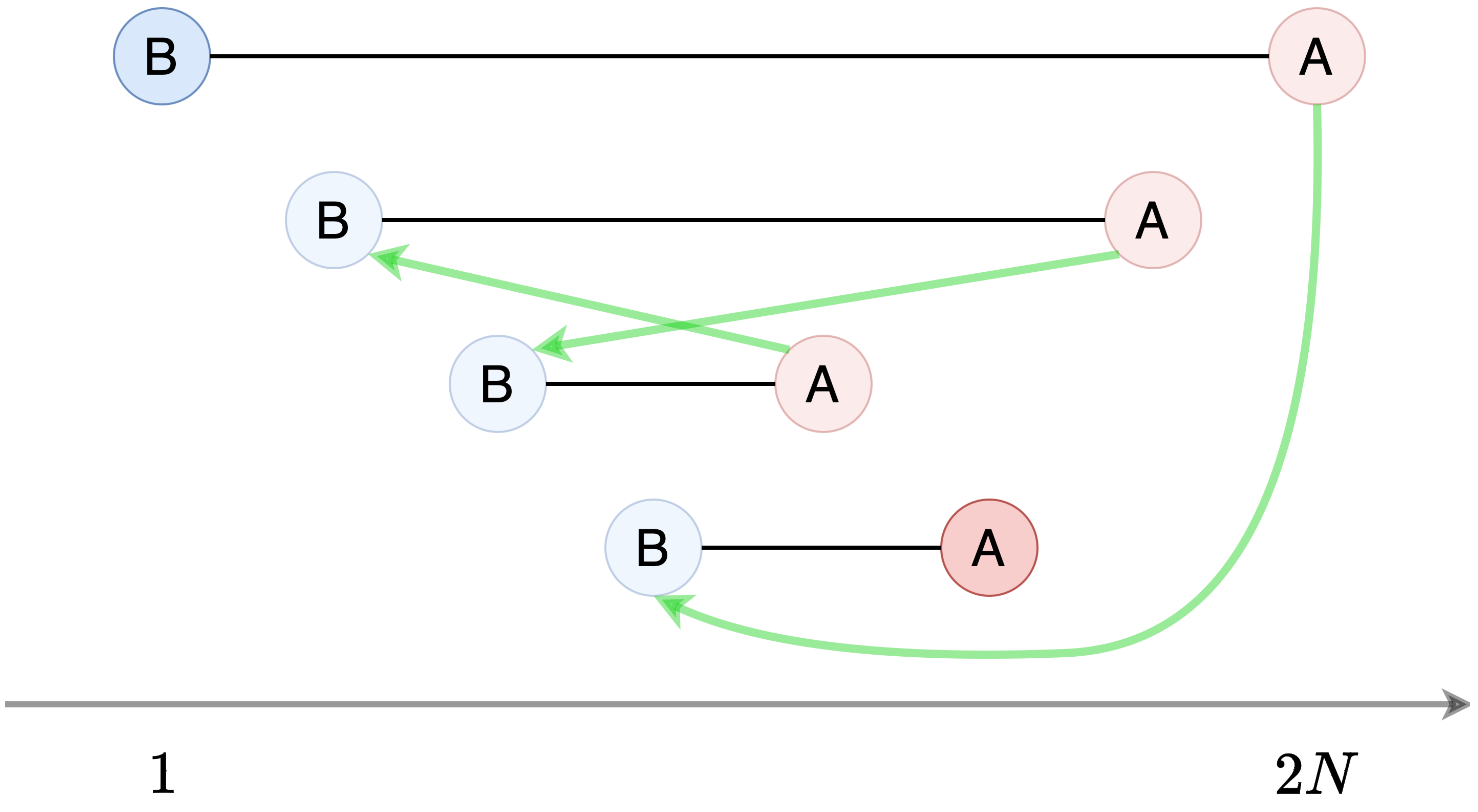
正しい貪欲法



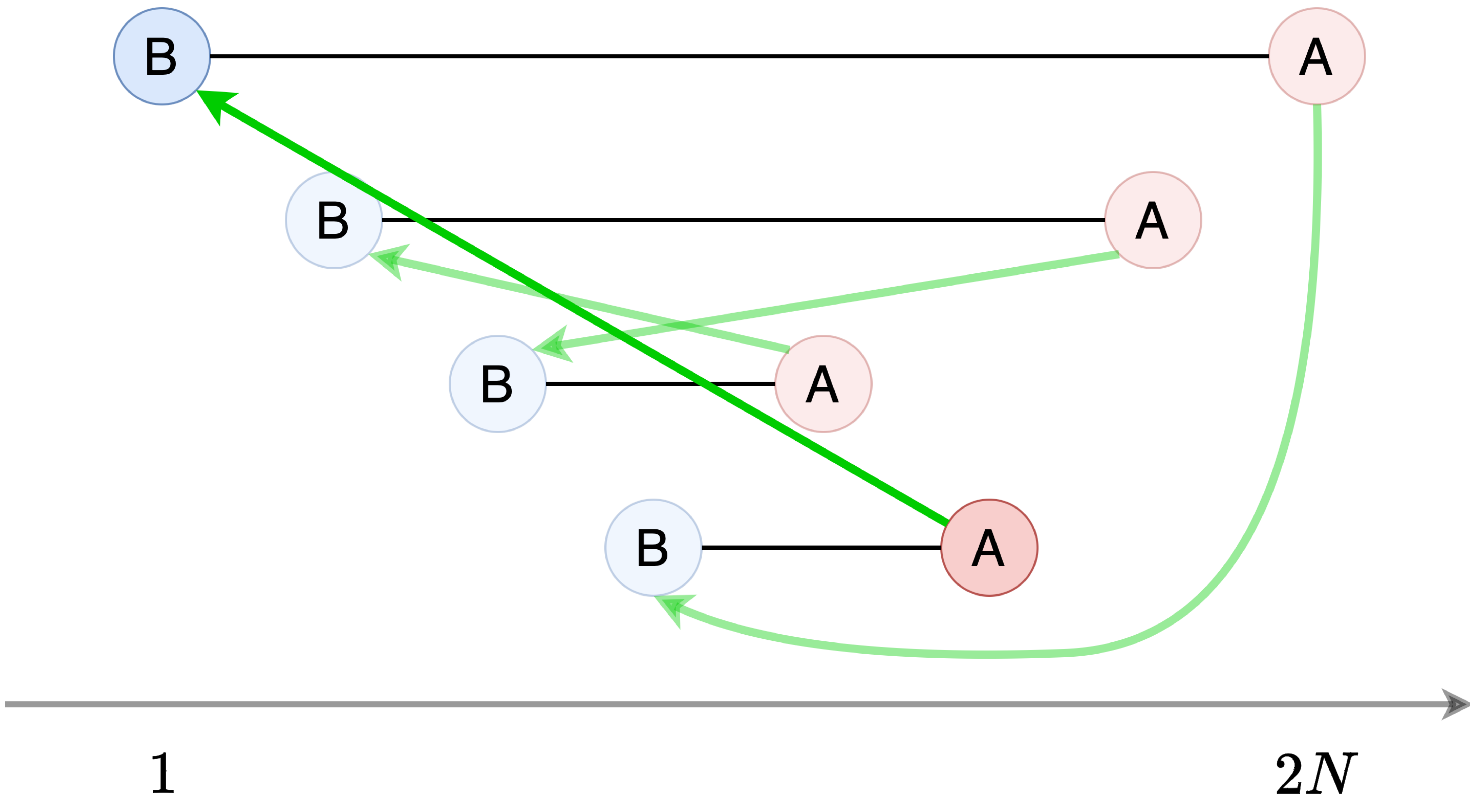
正しい貪欲法



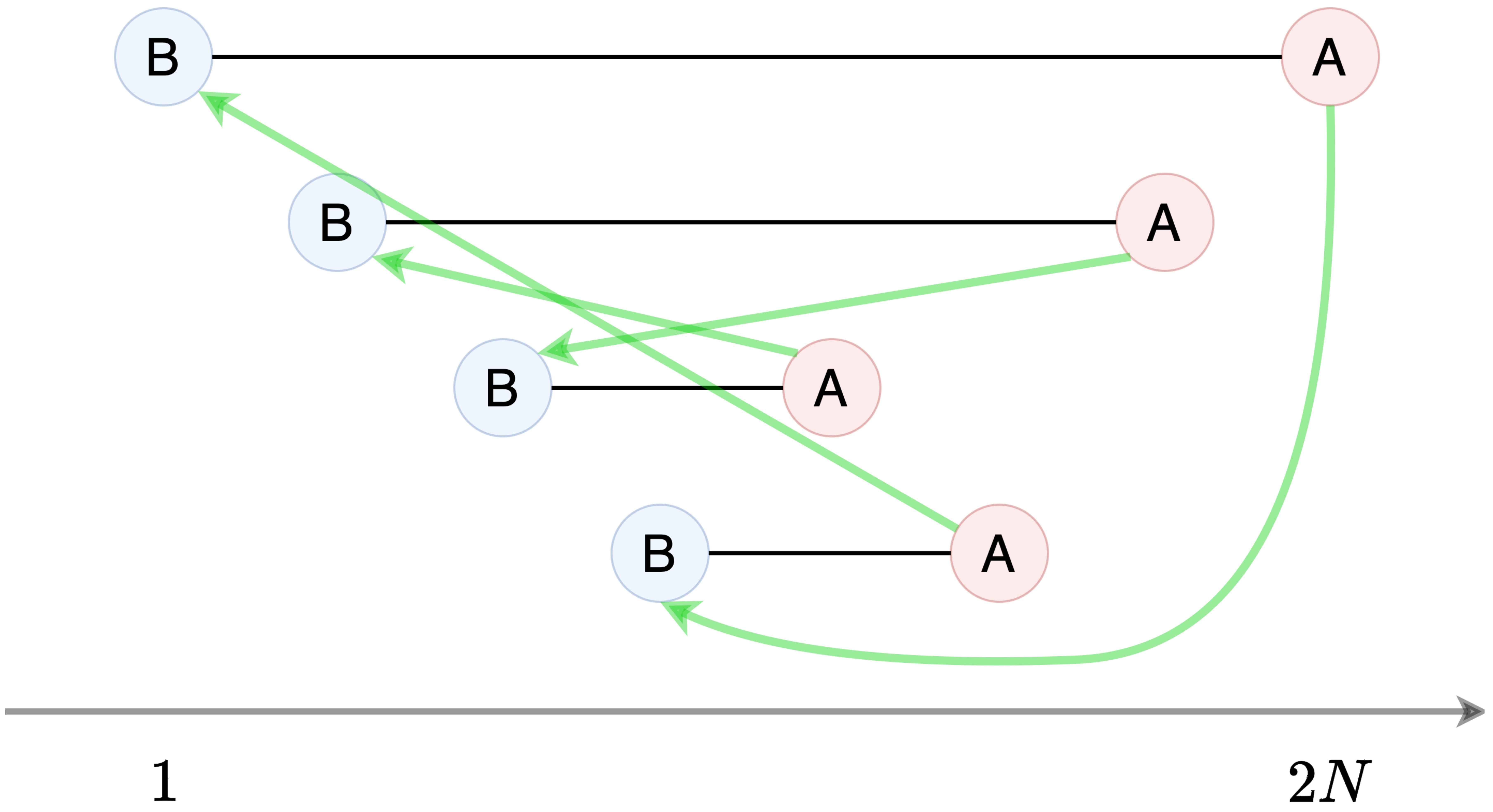
正しい貪欲法



正しい貪欲法



正しい貪欲法



正しい貪欲法

- この貪欲法が途中で失敗する i.e. ある j について生徒 j のプレゼントを受け取れる人が誰もいない場合，区間 j は他のどの区間とも共通部分を持たないことが示せる．
- 対偶：どの区間も他のどれかしらの区間と共通部分を持つとき，この貪欲法は必ず成功する．つまり，実際にプレゼント交換をする方法が構築できる．証明完了．

小課題４ (31 点, 累計 50 点)

- $N \leqq 10^5, \ Q \leqq 10$
- グループ内の各区間について，その区間との共通部分を持つような他の区間がグループ内に存在するか判定すれば良い.

  ソート等を用いて，クエリあたり $O(N \log N)$
- 条件を見つけていなくても，正しい貪欲がわかっているならば，std::set 等を用いて実際にシミュレーションし，貪欲が途中で失敗するかどうか調べればよい.
- 計算量 $O(QN \log N)$
- 嘘貪欲に気をつけましょう

小課題５ (8 点, 累計 58 点)

- $N \leqq 10^5$, $A_1 < A_2 < \ldots < A_N$，$B_1 < B_2 < \ldots < B_N$
- 小課題４を貪欲法で解いた人が条件を見つけるのを助ける用の小課題
  - 限定された条件下での貪欲法の動作をよく観察し，貪欲法が失敗するのはどんなときか考察する.

小課題５ (8 点, 累計 58 点)

- $N \leqq 10^5$, $A_1 < A_2 < \ldots < A_N$, $B_1 < B_2 < \ldots < B_N$
- 条件をすでに見つけている人にとっては簡単
  - ある区間が他の区間と共通部分を持つかは，その区間と両隣の区間との位置関係のみによって定まる.
  - $A_{i-1} < B_i < A_i < B_{i+1}$ を満たすような区間（つまり，両隣と共通部分を持たないような区間）の番号の集合 S を前計算する.
  - クエリでは，$[L_j, R_j]$ 内に S の要素があるか見ればいい．**両端の扱いに注意.**

小課題６〜満点

- 各区間 i に対して以下の値を定義する：
  - S_i：区間 i と共通部分を持つ区間の番号のうち，i 未満で最大のもの（ないならば 0）
  - T_i：区間 i と共通部分を持つ区間の番号のうち，i より大きくて最小のもの（ないならば $N+1$）
- あるグループが生徒 i を含み，かつそのグループを成す生徒の番号の範囲が $[S_i+1, T_i-1]$ に含まれるとき，区間 i はそのグループ内で他と共通部分を持たない
- $\Rightarrow L_j \in [S_i+1,\ i]$ かつ $R_j \in [i,\ T_i-1]$ なら，グループ j はプレゼント交換不可能

小課題６〜満点

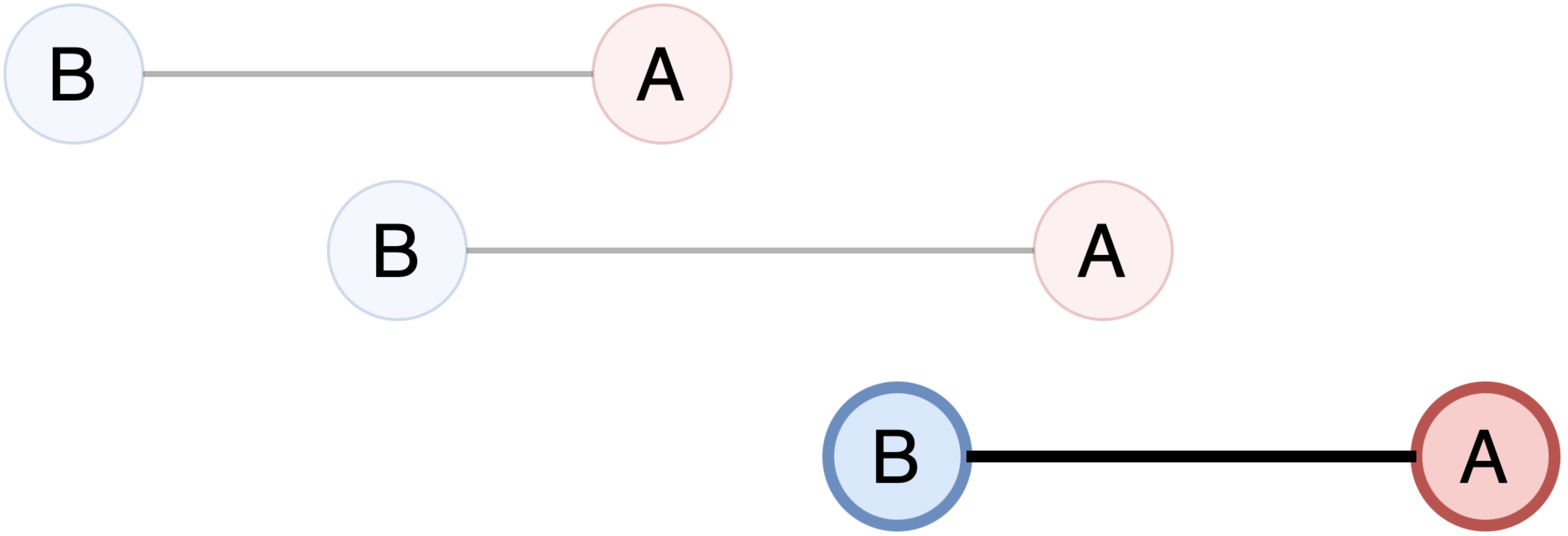
- 従って，S_i, T_i が各区間 i について求まっているとき，以下の問題に帰着される：
  - $N \times N$ の二次元平面上に N 個の長方形が存在している.
  - 平面上の点が Q 個与えられる.
    それぞれの点について，その点を内部に含む長方形が存在するか判定せよ.
- Fenwick tree (BIT) や Segment tree を用いた平面走査によって $O(Q \log N)$

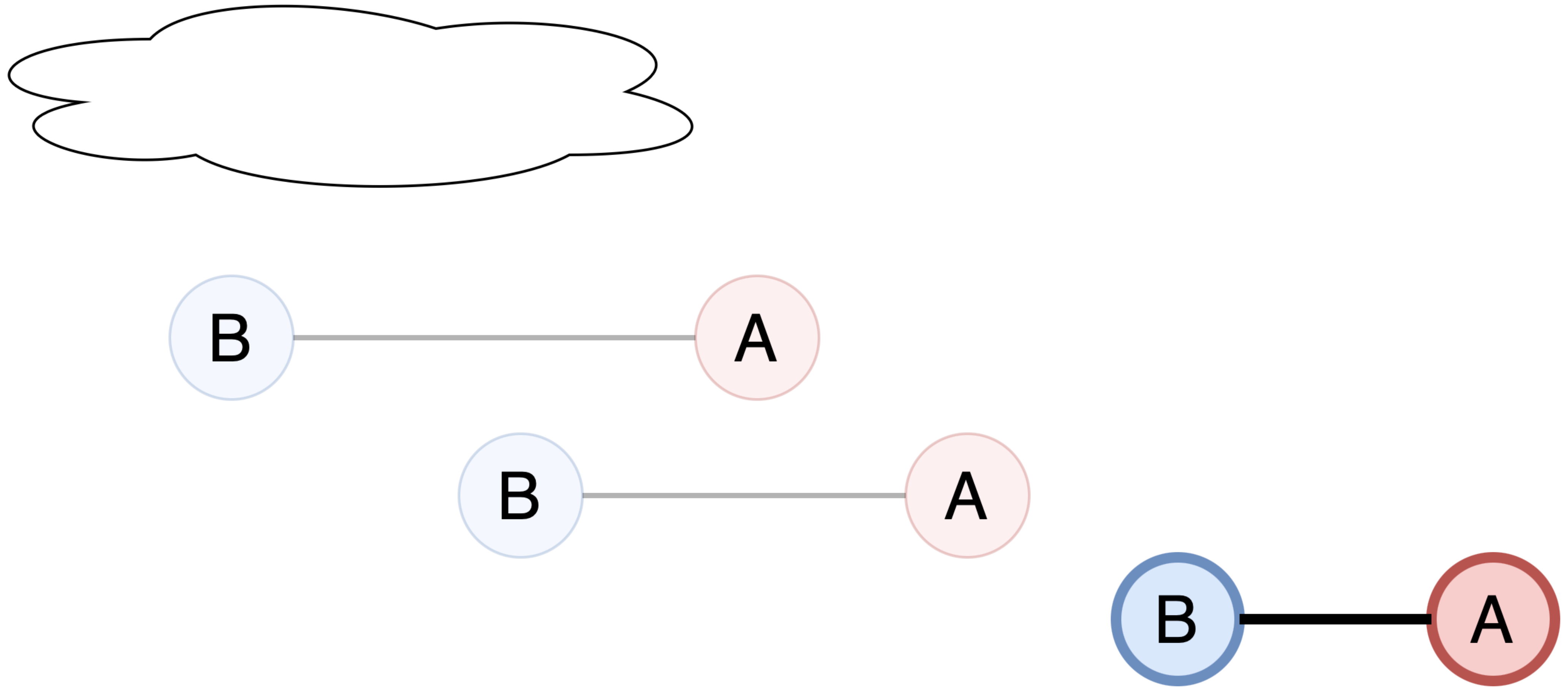
小課題６～満点

- 各区間 i に対して以下の値を定義する（再掲）：
  - S_i：区間 i と共通部分を持つ区間の番号のうち，i 未満で最大のもの（ないならば 0）
  - T_i：区間 i と共通部分を持つ区間の番号のうち，i より大きくて最小のもの（ないならば $N+1$）
- これを高速に求めるのが最後の課題（満点まで共通）．

小課題 6 (12 点, 累計 70 点)

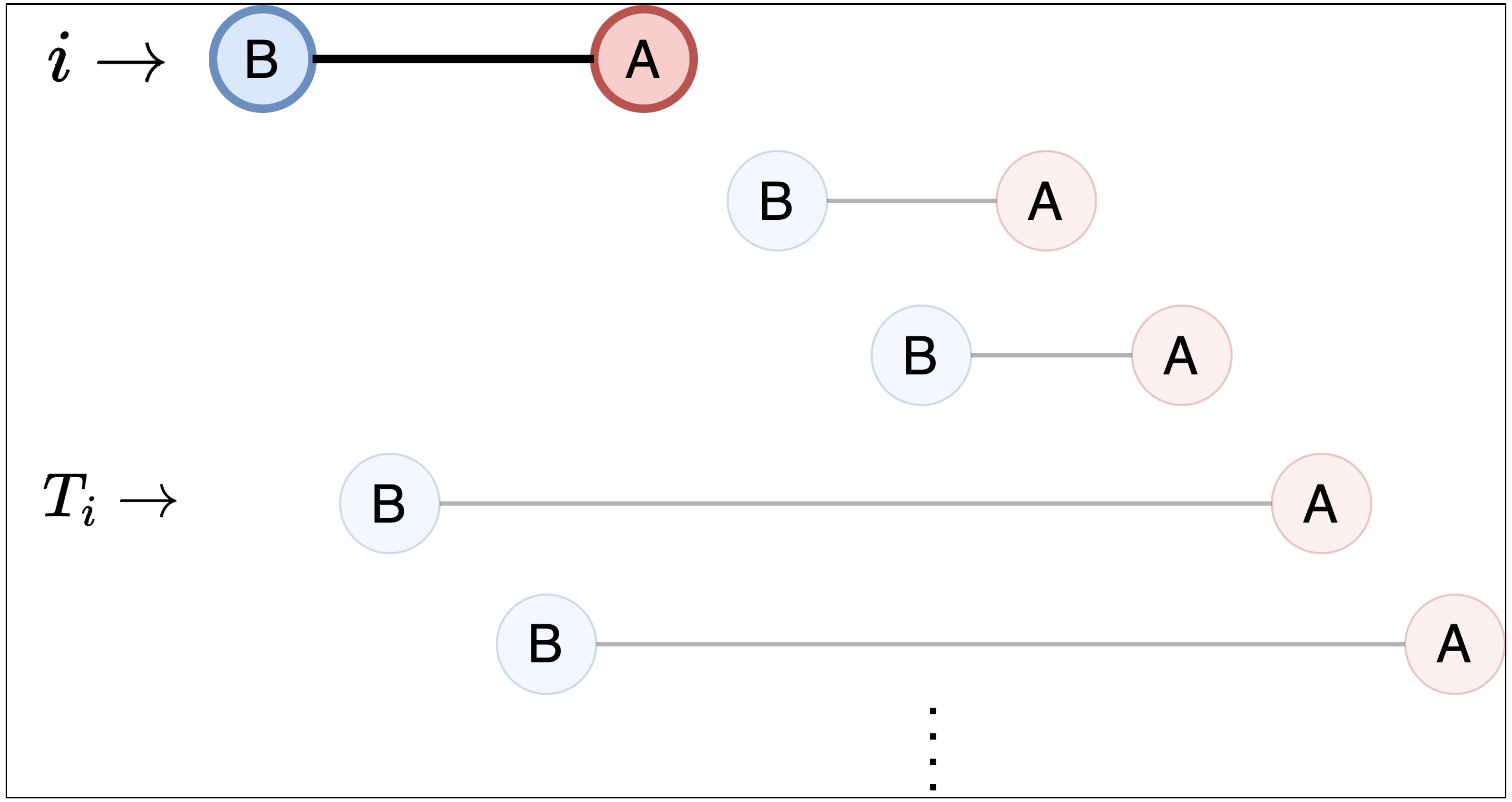
- 各区間 i に対して以下の値を定義する（再掲）：
  - S_i：区間 i と共通部分を持つ区間の番号のうち，i 未満で最大のもの（ないならば 0）
  - T_i：区間 i と共通部分を持つ区間の番号のうち，i より大きくて最小のもの（ないならば $N+1$）
- $N \leqq 10^5$, $A_1 < A_2 < \ldots < A_N$
- S_i については簡単：$A_{i-1} > B_i$ ならば $i-1$, $A_{i-1} < B_i$ ならば 0





小課題 6 (12 点, 累計 70 点)

- 各区間 i に対して以下の値を定義する（再掲）：
  - S_i：区間 i と共通部分を持つ区間の番号のうち，i 未満で最大のもの（ないならば 0）
  - T_i：区間 i と共通部分を持つ区間の番号のうち，i より大きくて最小のもの（ないならば $N+1$）
- $N \leqq 10^5, \ A_1 < A_2 < \ldots < A_N$
- T_i については？
  - $A_i > B_j$ を満たす最小の $j \ (> i)$



小課題6 (12 点, 累計 70 点)

- 各区間 i に対して以下の値を定義する（再掲）：
  - S_i：区間 i と共通部分を持つ区間の番号のうち，i 未満で最大のもの（ないならば 0）
  - T_i：区間 i と共通部分を持つ区間の番号のうち，i より大きくて最小のもの（ないならば $N+1$）
- $N \leqq 10^5, \ A_1 < A_2 < \ldots < A_N$
- T_i については？
  - $A_i > B_j$ を満たす最小の j $(> i)$
  - segment tree や stack などのデータ構造上で二分探索
- 計算量 $O(N \log N + Q(\log N + \log Q))$

小課題 7 (18 点, 累計 88 点)

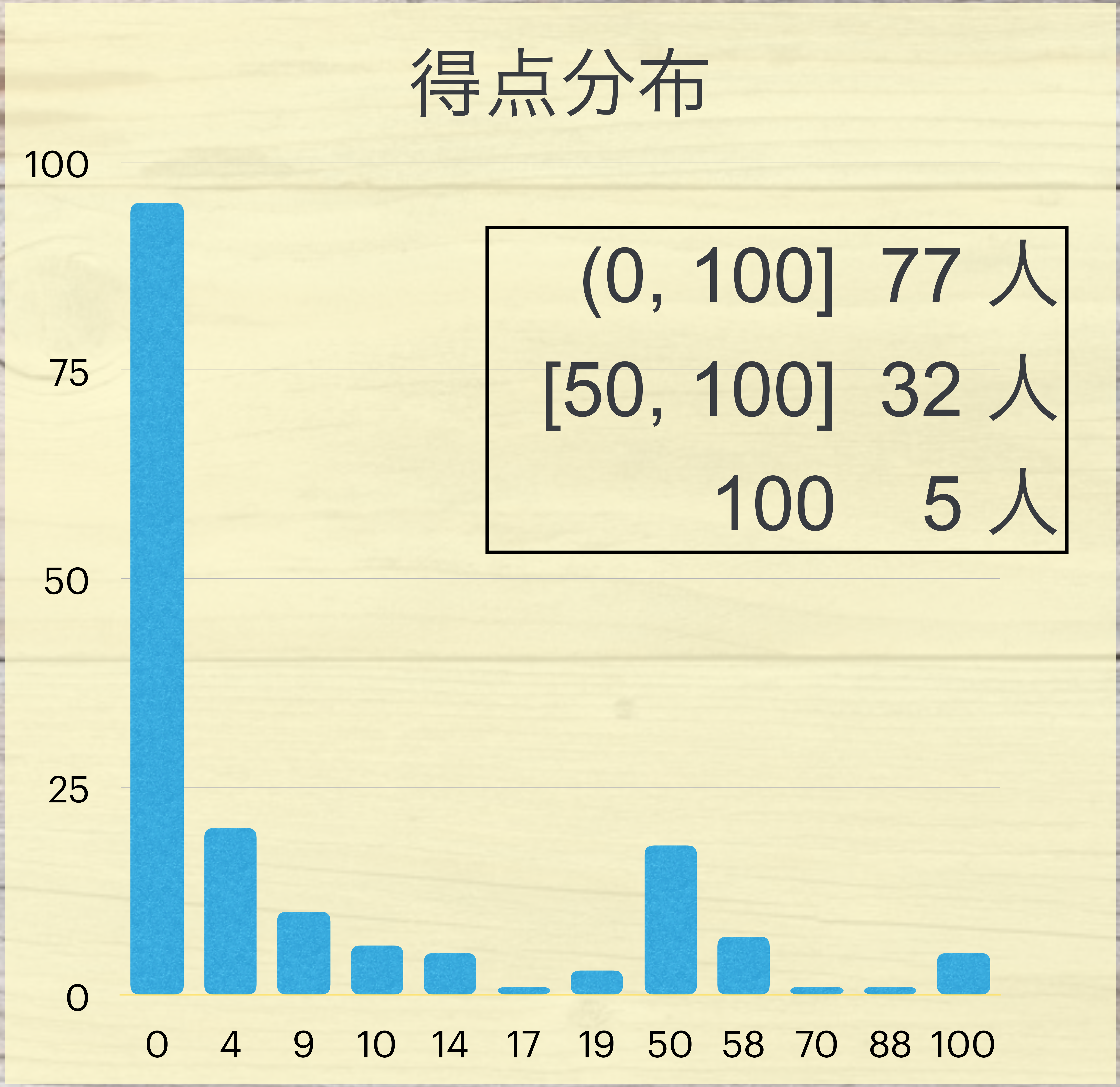
- 各区間 i に対して以下の値を定義する（再掲）：
  - S_i：区間 i と共通部分を持つ区間の番号のうち，i 未満で最大のもの（ないならば 0）
  - T_i：区間 i と共通部分を持つ区間の番号のうち，i より大きくて最小のもの（ないならば $N+1$）
- $N \leqq 10^5$
- 2D segment tree (point update rectangle max) などを用いる（詳細略）
  - ほぼ "貼るだけ" だが，余分 log が付くので満点は取れない
- 計算量 $O(N \log^2 N + Q(\log N + \log Q))$ など

小課題８ (12 点, 累計 100 点)

- 各区間 i に対して以下の値を定義する（再掲）：
    - S_i：区間 i と共通部分を持つ区間の番号のうち，i 未満で最大のもの（ないならば 0）
    - T_i：区間 i と共通部分を持つ区間の番号のうち，i より大きくて最小のもの（ないならば $N+1$）
- $N \leqq 5 \times 10^5$
- S_i についてだけ考える（T_i も同様）
- 長さ $2N$ の配列 $v = (0,0,\ldots,0)$ を用意する．$i = 1,2,\ldots,N$ の順に以下を行う：
    - $v[B_i], v[B_i+1], \ldots, v[A_i]$ の最大値を求め，S_i とする.
    - $v[B_i], v[B_i+1], \ldots, v[A_i]$ の値をすべて i に更新する.

小課題８ (12 点, 累計 100 点)

- 各区間 i に対して以下の値を定義する（再掲）：
  - S_i：区間 i と共通部分を持つ区間の番号のうち，i 未満で最大のもの（ないならば 0）
  - T_i：区間 i と共通部分を持つ区間の番号のうち，i より大きくて最小のもの（ないならば $N+1$）
- 長さ $2N$ の配列 $v=(0,0,\ldots,0)$ を用意する．$i=1,2,\ldots,N$ の順に以下を行う：
  - $v[B_i], v[B_i+1], \ldots, v[A_i]$ の最大値を求め，S_i とする.
  - $v[B_i], v[B_i+1], \ldots, v[A_i]$ の値をすべて i に更新する.
- lazy segment tree (range update range max) が使える.
- 計算量 $O(N\log N + Q(\log N + \log Q))$



得点分布
100
75
50
25
0
(0, 100] 77 人
[50, 100] 32 人
100 5 人
0
4
9
10
14
17
19
50
58
70
88
100