JOI 2024/2025 本選 1 問目
色塗り (Grid Coloring) 解説

解説担当 : 西脇響喜

問題概要

- $N \times N$ のマス目に色を塗る (色は正整数の番号で表される).
- 1 行目のマスと 1 列目のマスの色は既に決まっていて,
  残りのマスを (i, j) $(2 \leqq i, j \leqq N)$ の昇順に
  i. マス $(i-1, j)$ に塗られている色と
  ii. マス $(i, j-1)$ に塗られている色のうち
  番号の大きい方の色で塗る.
- 最終的に最も多くのマスに塗られた色および、その色が塗られているマスの数を求めよ.

$N \leqq 2 \times 10^5$, (色の番号) $\leqq 10^9$

小課題

番号	配点	制約	計算量の例
1.	15 点	$N \leqq 500, \quad C \leqq 10^5$	$O(N^2 + \max(C))$
2.	10 点	$N \leqq 500$	$O(N^2 \log N)$
3.	20 点	$C \leqq 2$	$O(N)$
4.	25 点	A_i, B_j は狭義単調増加	$O(N)$
5.	30 点	追加の制約はなし	$O(N \log N)$

(色の番号の最大値 (≡ 値域) を C で表した.)

小課題 1 $(N \leqq 500, C \leqq 10^5)$

- N が小さい
  → N^2 個のマスに塗られる色の番号を愚直に求めても間に合う！

小課題 $1\ (N \leqq 500, C \leqq 10^5)$

- N が小さい
  → N^2 個のマスに塗られる色の番号を愚直に求めても間に合う！
- $O(N^2)$ 回の計算でマスの色を求めた後、各色の出現数を $O(C)$ で求める
- 長さ C の配列を用意した上で、N^2 個の各マスについて塗られている色に対応する要素に 1 を足していく
  (色の番号が 110 なら 110 番目の要素に 1 を足す、といった具合)

小課題 2 ($N \leq 500$)

- C が大きい

  → 長さ C の配列を用いることができない

小課題 2 ($N \leqq 500$)

- C が大きい
  → 長さ C の配列を用いることができない
  → 代わりに map (連想配列) を使う
- A_i, B_j に現れない番号の色は無視して良いので、考えるべき色の種類数は高々 $O(N)$
- 計算量は $O(N^2 \log N)$

小課題 3 ($C \leq 2$)

- N が大きい
  → 愚直に N^2 個のマスの色を求めていては間に合わない
- しかし C が非常に小さい (色の番号が高々 2 通り)
  → どんなときにマス (i, j) が 2 で塗られるか？を考える

小課題 3 ($C \leqq 2$)

こんな例を考える

2	1	1	2
1			
2			
1			

小課題 3 ($C \leqq 2$)

2	1	1	2
1	1	1	2
2			
1			

小課題 3 $(C \leq 2)$

2	1	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2
1			

小課題 3 $(C \leqq 2)$

2	1	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2
1	2	2	2

小課題 3 ($C \leqq 2$)

考察

- 2 が現れて以降の行はすべて 2

小課題 3 ($C \leqq 2$)

考察

- 2 が現れて以降の行はすべて 2
  → 同じことが列についても実は言える
  → 2 が現れて以降の列はすべて 2
- 反対に、2 が現れるまではずっと 1
- まとめると、マス (i, j) ($2 \leqq i, j \leqq N$) は
  i. $A_2 = A_3 = \cdots = A_i = B_2 = B_3 = \cdots = B_j = 1$ ならば 1 で塗られる
  ii. そうでないならば 2 で塗られる

小課題 3 ($C \leqq 2$)

数えるパート

- $A_2 = A_3 = \cdots = A_i = 1$ が成り立つ最大の i を i',
  $B_2 = B_3 = \cdots = B_j = 1$ が成り立つ最大の j を j' として,
  ($A_2 = 2$ なら $i' = 1$, $B_2 = 2$ なら $j' = 1$)
  2 行目、2 列目以降 の $(N-1)^2$ マスのうち
    i. 1 で塗られるものの個数は $(i'-1) \times (j'-1)$
    ii. 2 で塗られるものの個数は $(N-1)^2 - (i'-1) \times (j'-1)$
- 1 行目，1 列目のマスについても個数に足すのを忘れないように！

小課題 3 ($C \leqq 2$)

- 計算量は $O(N)$
- 各色について「その色で塗られるマスの個数はいくつか？」を数えるのはかなり本質的な考察
  (満点制約においても色の候補数は高々 $O(N)$ なので，数えるパートを高速に行うことで満点が得られる)

小課題 4 (A_i, B_j は狭義単調増加)

こんな例を考える

1	3	5	8
2	3	5	8
4	4	5	8
8	8	8	8

小課題 4 (A_i, B_j は狭義単調増加)

考察

- マス (i, j) ($2 \leqq i, j \leqq N$) は $\max(A_i, B_j)$ で塗られている
  → 理由:
  - $A_i \leqq B_j$ として
    a. マス $(2, j), (3, j), \cdots, (i-1, j)$ は B_j で塗られ
    b. マス $(i, j-1)$ の色は B_j 以下となる ($A_2, A_3, \cdots, A_i, B_2, B_3, \cdots, B_{j-1} \leqq B_j$ に依る) ため
  - 細かい証明は数学的帰納法で

小課題 4 (A_i, B_j は狭義単調増加)

数えるパート

- 各行，各列に注目！！
- 例えば各行 i ($2 \leqq i \leqq N$) について，
  「i 行目の 2 列目以降にあるマスのうち A_i で塗られるものの個数はいくつか？」を考える
  → これは $B_j \leqq A_i$ なる j ($2 \leqq j \leqq N$) の個数に等しい
  → B には単調性があるので，二分探索をすると $O(\log N)$ で求まる
- 列についても同じことをやる
- $A_i = B_j$ なる (i, j) が存在する場合に注意！
  (あとで重複分を引いておくなどの処理が必要)

小課題 4 (A_i, B_j は狭義単調増加)

- 小課題 2 の map 方針と組み合わせるなどして，$O(N \log N)$

小課題 5 (追加の制約なし)

考察

- 小課題 4 について: なんで $\max(A_i, B_j)$?

小課題 5 (追加の制約なし)

考察

- 小課題 4 について: なんで $\max(A_i, B_j)$？
  → $\max(A_2, A_3, \cdots, A_i) = A_i$，$\max(B_2, B_3, \cdots, B_j) = B_j$ だから
- より一般に，マス (i, j) ($2 \leqq i, j \leqq N$) は $\max(A_2, A_3, \cdots, A_i, B_2, B_3, \cdots, B_j)$ で塗られる
  → 証明は帰納法で

小課題 5 追加の制約なし

6	4	2	6
3	4	4	6
5	5	5	6
1	5	5	6

小課題 5 追加の制約なし

数え上げパート

- $A'_i = \max(A_2, A_3, \cdots, A_i)$，$B'_j = \max(B_2, B_3, \cdots, B_j)$ として，
  A' と B' について小課題 4 と同じ方針で数えれば OK
- 重複分を除くパートが少し面倒かも…？
  → 色 X についての重複分は ($A'_i = X$ なる i の個数) × ($B'_j = X$ なる j の個数) で求まり，実は場合分けも要らない

小課題 5 (追加の制約なし)

- より簡明な実装例が後ほど JOI のホームページに上がるので，参考にしてみてください
  (「$A'_i = B'_j$ の場合 $A'_i < B'_j$ と同様に扱う」といった無理やりな順序付けをしても実は壊れない)
  (こういう無理やりな順序付けは大抵の場合壊れず，場合分けも省いてくれるので，一般にとても有用)
- 計算量は $O(N \log N)$

統計情報

点数	1	2	3	4	5	人数	累積人数
100	O	O	O	O	O	164	191
70	O	O	O	O	-	2	27
50	O	O	-	O	-	3	25
45	O	O	O	-	-	5	22
25	O	O	-	-	-	4	17
15	O	-	-	-	-	2	13
0	-	-	-	-	-	11	11