4 親密なシェフ (Intimate Chef)

Author : 蜂矢 倫久 (Mitsubachi)

小課題 1

すべての 2 人組について，仲が悪いかどうかを判定し，仲が悪くなければその 2 人組を選んだときの満足度を求める．

仲が悪いかの判定は vector や map を用いれば $O(1)$ や $O(\log M)$ などで可能である．また，ある 2 人組の満足度を求めるのは $O(1)$ で可能である．したがって，この部分は $O(N^2)$ や $O(N^2 \log M)$ などで実行できる．

これによって求めることのできた満足度としてありうる候補の列を sort すればクエリあたり $O(1)$ で答えられる．全体の計算量は $O(N^2 \log N + Q)$ や $O(N^2 (\log N + \log M) + Q)$ などになる．

小課題 2

説明を簡単にするために，A_i は全て異なる値とする．また，$A_1 \leqq A_2 \leqq \cdots \leqq A_N$ とする．このとき，満足度の分布は以下のようになる．

- 満足度が $A_N + 1$ となる 2 人組はシェフ q がシェフ N となる $N - 1$ 組である．
- 満足度が $A_{N-1} + 1$ となる 2 人組はシェフ q がシェフ $N - 1$ となる $N - 2$ 組である．
- ...
- 満足度が $A_2 + 1$ となる 2 人組はシェフ q がシェフ 2 となる 1 組である．

したがって，0 で初期化した変数に $N - 1$，$N - 2$ と足していき，X_1 以上となったタイミングで，最後に足した値に対応する満足度を出力すれば良い．A_i に同じ値がある場合でも同様に行うことができる．

A を sort する部分がボトルネックとなる．全体で $O(N \log N)$ で答えが求まる．

小課題 3

依頼することのできない M 組も含めた場合の満足度の分布は小課題 2 で述べたものである．すなわち，依頼することのできない M 組の部分をそこから引くことで，満足度の分布を求めることができる．

満足度の分布を求めた後は小課題 2 と同様にして求めることができる．全体で $O(N \log N + M)$ で答えが求まる．

小課題 4

満足度の分布を求めた後を考える．これは非負整数からなる数列 $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ と $w_1, w_2, \ldots, w_m$ が与えられたとき，$j = 1, 2, \ldots, m$ について $v_1 + v_2 + \cdots + v_i \geqq w_j$ となる最小の i を求める問題と考えることができる．

これは累積和を計算すれば二分探索を用いて各 j について答えを $O(\log n)$ で求めることができる．

したがって，今回の問題においては全体で $O(N \log N + M + Q \log N)$ で答えが求まる．

小課題 5

満足度の最大値が分かれば良い．以降の小課題では，$A_1 \leqq A_2 \leqq \cdots \leqq A_N$ となるようにシェフの番号を付け直すとする．

$q = j$ となる 2 人組のうち満足度が最大となる 2 人組を求めることを考える．シルパンチョの美味しさは A_j となるので，シェフ $1, 2, \ldots, i-1$ について B_i が大きい順に調べていって，仲が悪い 2 人組でなければその時点でシェフ j に関する探索を打ち切れば良い．仲が悪い 2 人組かの判定は map を用いれば $O(\log M)$ で行える．

$p = i, q = j$ として調べた際に仲が悪い 2 人組であるためにその時点で探索を打ち切らないような (i, j) は高々 M 組である．したがって，この探索は $q = 1, 2, \ldots, N$ 全体について $O((N + M) \log M)$ で行える．

したがって，全体で $O((N + M) \log M)$ で答えが求まる．

小課題 6

小課題 5 と同様に $A_1 \leqq A_2 \leqq \cdots \leqq A_N$ となるようにシェフの番号を付け直すとする．

答えを二分探索することを考える．満足度が S 以上となる 2 人組が X_1 組以上あるかを判定できれば良い．

$q = j$ となる 2 人組のうち満足度が S 以上となる 2 人組の個数を求めることを考える．シルパンチョの美味しさは A_j となるので，シェフ $1, 2, \ldots, i-1$ について B_i が大きい順に調べていって，仲が悪い 2 人組でないかつ満足度が S 未満となればその時点でシェフ j に関する探索を打ち切れば良い．仲が悪い 2 人組かの判定は map を用いれば $O(\log M)$ で行える．

探索の途中でも，満足度が S 以上となる 2 人組が X_1 組見つかれば，その時点で全体の探索を打ち切って良い．したがって，二分探索の各ループは $O((N + M + X_1) \log M)$ で行える．

したがって，全体で $O((N + M + X_1) \log M \log(\max(A_i) + \max(B_i)))$ で答えが求まる．

小課題 7

小課題 5 と同様に $A_1 \leqq A_2 \leqq \cdots \leqq A_N$ となるようにシェフの番号を付け直すとする．

$X = \max(X_k)$ とする．満足度が $1, 2, \ldots, X$ 番目に高い 2 人組における満足度が分かれば良い．小課題 6 の解法を用いることで，満足度が S 以上となる 2 人組が X 組未満であるような最小の S を求めることができる．この S について，満足度が S 以上となる 2 人組の個数を C とする．

このとき，満足度が $C+1, C+2, \ldots, X$ 番目に高い 2 人組における満足度は $S-1$ である．満足度が $1, 2, \ldots, C$ 番目に高い 2 人組における満足度を求めることを考える．

これは小課題 6 における二分探索の部分において，条件を満たす 2 人組を見つけるたびにその 2 人組を vector などで記録すれば良い．

全体で $O((N + M + X) \log M \log(\max(A_i) + \max(B_i)) + Q)$ で答えが求まる．実装によるが，定数倍が良ければこの解法で満点を得られることも考えられる．

小課題 8

$X = \max(X_k)$ とする．満足度が $1, 2, \ldots, X$ 番目に高い 2 人組における満足度が分かれば良い．仲の悪い 2 人組も認めた場合の $1, 2, \ldots, M + X$ 番目に高い 2 人組における満足度が分かればそこから仲の悪い 2 人組の分を取り除けば良い．したがって，これを求めることを考える．

満足度が高いものを先頭におく priority queue などを用いて，満足度が 1 番目に高い 2 人組から順に列挙することを考える．前準備として，A_i と B_i に順序をつける．同じ値については適当にタイブレークを行えば良い．ここで，$p = q$ となる 2 人組についても priority queue に追加することを許容する．

満足度が 1 番目に高い 2 人組について，A_i も B_i も 1 番目に高いペアである．したがって，これを最初 priority queue に追加すれば良い．

その後，$M + X$ 番目に高い満足度が分かるまで以下のアルゴリズムを繰り返せば良い．

1. priority queue の先頭の 2 人組を取り出す．シェフ p とシェフ q とする．
2. この 2 人組について既に調べたならば 1. へ移動する．
3. $p \neq q$ かつ仲の悪い 2 人組でない場合，これを残っている 2 人組の中で満足度が 1 番目に高い 2 人組とする．
4. A_p, A_q の A_i における順位を r_p, r_q として，B_p, B_q の B_i における順位を r'_p, r'_q とする．
5. $r_p \leqq N - 1$ ならば $r_p + 1$ 番目に A_i が高い i を p'_A とする．p'_B, q'_A, q'_B についても同様に定める．
6. シェフ p'_A, q の 2 人組，シェフ p'_B, q の 2 人組，シェフ p, q'_A の 2 人組，シェフ p, q'_B の 2 人組を priority queue に追加する．

全体で $O((N + M + X) \log(N + M + X))$ で答えが求まる．