3 衣服 (Clothes)

Author : 林 涼太郎

小課題 1

以下のように場合分けを行う．

- $A_1 > 23$ の場合，体感温度は 23 度にできない．
- $A_1 = 23$ の場合，服を 1 枚も買うことなく体感温度を 23 度にできる．
- $A_1 < 23$ の場合，種類 $23 - A_1$ の服を 1 枚買えば体感温度を 23 度にできる．

小課題 2

$A_N > 23$ の場合，目標は達成不可能である．以下のすべての小課題の解説において，$A_N \leqq 23$ であるという仮定をおく．$B_i := 23 - A_i$ により $B_1, \ldots, B_N$ を定めると，$B_1 > B_2 > \cdots > B_N \geqq 0$ となる．

この問題は次のように形式的に言い換えられる：

> すべての要素が 1 以上 100 以下の整数であるような多重集合 $S = \{\!\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}\!\}$ であって，「すべての $1 \leqq i \leqq N$ に対し，総和が B_i になるような S の部分集合が存在する」という条件を満たすものを考える．S の要素数の最小値を求め，また最小値を達成する S の例を一つ構築せよ．

$N \leqq 3$ の場合は，以下のように場合分けを行うことで最適解が得られる．

- $N = 1$ である場合，$B_1 = 0$ ならば $S = \{\!\{\}\!\}$ とし，そうでなければ $S = \{\!\{B_1\}\!\}$ とする．
- $N = 2$ である場合，$B_2 = 0$ ならば $S = \{\!\{B_1\}\!\}$ とし，そうでなければ $S = \{\!\{B_1, B_2\}\!\}$ とする．
- $N = 3$ である場合，
  - $B_3 = 0$ ならば $S = \{\!\{B_1, B_2\}\!\}$ とする．
  - $B_3 > 0$ かつ $B_1 = B_2 + B_3$ ならば，$S = \{\!\{B_2, B_3\}\!\}$ とする．
  - 以上のいずれでもない場合，$S = \{\!\{B_1, B_2, B_3\}\!\}$ とする．

小課題 3

この小課題においては，$B_1 = N - 1, B_2 = N - 2, \ldots, B_N = 0$ である．

購入する服の枚数の最小値が k であるとする．このとき，S の部分集合は高々 2^k 個しかないため，S の部分集合の総和としてあり得る値も高々 2^k 個しかない．したがって，答えの下界として $2^k \geqq N$ が得られる．

逆に，整数 k が $2^k \geqq N$ を満たすとき，$S = \{\!\{2^0, 2^1, \ldots, 2^{k-1}\}\!\}$ とすることで，部分集合の総和として $0, 1, \ldots, 2^k - 1$ の 2^k 通りを作ることができる．この小課題においては，B_i の分布が特殊であるために，この構築により最適解が達成できる．

小課題 4, 5

整数 $B_1 + 1 \leqq i \leqq 100$ について，種類 i の種類を購入すると明らかに最適解を与えない．また，$1 \leqq i \leqq B_1$ については，種類 i の服は高々 1 枚までしか購入しないとしてよい．これは，「購入した服の中に種類 i の服が 2 枚存在すれば，片方を種類 $2i$ の服に置き換える」という操作を行っても，S のある部分集合の総和として作れなくなる整数が存在しないことから証明できる．

以上の考察により，$s_1, s_2, \ldots, s_k$ の中に重複はなく，かつ $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ は $\{0, 1, \ldots, B_1\}$ の部分集合になっているような $s_1, s_2, \ldots, s_k$ の選び方のみ考えればよいとわかる．

$L = B_1$ とする．服の購入の仕方として 2^L 通りのすべてを試すことにする．購入する服の種類 $s_1, s_2, \ldots, s_k$ を固定したときに，これの部分集合の和として $B_1, B_2, \ldots, B_N$ をすべて作ることができるかどうかを判定したい．

さらに 2^k 通りの部分集合をすべて試すことにすると，全体の時間計算量は $O(3^L + 2^L N)$ となり，小課題 4 に正答できる．

これを高速化するために部分和問題の要領で DP を用いて計算すると，小課題 5 にも正答できる．

小課題 6, 7

$S = \{\!\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}\!\}$ を選ぶことで部分和として $0, 1, \ldots, 63$ をすべて作ることができる．したがって，最適解において S のサイズは 6 以下である．

小課題 6 においては $31 \geqq B_1 > B_2 > \cdots > B_N \geqq 0$ である．$\{1, 2, \ldots, 31\}$ の部分集合であってサイズ 6 以下のものは 942649 個存在する．これらすべてを列挙し，DP で有効な解かどうか判定することにより，小課題 6 に正答できる．

小課題 7 においては $63 \geqq B_1 > B_2 > \cdots > B_N \geqq 0$ である．$\{1, 2, \ldots, 63\}$ の部分集合であってサイズ 6 以下のものは 75611761 個存在する．これらすべてを列挙し，DP で有効な解かどうか判定すると，実装にもよるが実行時間制限に収めるのは厳しいと思われる．

ここから 2 つの高速化の余地があり，両方を実装すると十分余裕を持って満点を得ることができる．片方のみの実装であっても満点を得ることは可能である．

- $\{1, 2, \ldots, 63\}$ の部分集合であってサイズ 5 以下のもののみ列挙する（7666240 個存在する）．これで解が見つからなければ $(1, 2, 4, 8, 16, 32)$ を最適解として出力する．
- 64bit 整数を用いて，ビットシフトと論理和の演算により DP を高速化する．