4 川下り (River Rafting)

Author : 増田 拓真

小課題 1

川下りの回数は高々 N 回である．なぜなら，N 回終了した時点で街 1 のランプの強さが N となり，すべての街を照らすようになるからである．川下りを 1 回以上 N 回以下行うとき調べるべき通り数は，川下りの順番が無視できることに注意して $\binom{2N}{N} - 1$ 通りである．$N = 8$ のときは 12869 通りであり，これは全探索可能である．よってそれぞれの場合で実際にすべて街が照らされているかどうかをシミュレーションすればよい．時間計算量は $O\left(N^2\binom{2N}{N}\right)$ などとなる．

小課題 3

この小課題では高々 2 回の川下りによって条件が満たせる．また 2 回の川下りを行ったとしても，川下りが終わる街はどちらも同じとしてよい．

街 1 で川下りを終える場合，必要な回数は 2 回であり，そのときのコストは $2C_1$ である．街 k $(2 \leqq k \leqq N)$ で川下りを終える場合，必要な回数は $N = 2$ のときは 1 回でコストは C_k，$N \geqq 3$ のときは 2 回でコストは $2C_k$ である．これらの最小値をとれば答えとなる．

小課題 4

この小課題も，川下りを終了する街はすべて同じとしてよい．街 i で川下りを終えたとき，必要な回数は $N - i + 1$ 回であり，コストは $(N - i + 1)C_i$ である．これらの最小値をとれば答えとなる．

小課題 2

次のような dp を考える．

$\mathrm{dp}[i][j][k]$ = 街 i を根とした部分木で，川下りを j 回行い，
照らされてない街の i からの深さが最大 k である場合の最小コスト

街 i の子孫の C の最小値を C_i^* とする．また街 i の子を $v_1, v_2, \ldots, v_m$ とする．このとき $\mathrm{dp}[i][j][k]$ は次の遷移で求められる．

$$\mathrm{dp}[i][j][k+1] = \min_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_m=j,\\ \max(k_1,k_2,\ldots,k_m)\leqq k}} \left(\sum_{t=1}^{m} \mathrm{dp}[v_t][j_t][k_t] \right)$$
$$\mathrm{dp}[i][j][0] = \min_{j'} \left(\mathrm{dp}[i][j'][j] + C^* \times \max(0, j-j')\right)$$

ここで，最終的な答えは $\min_j \mathrm{dp}[1][j][0]$ である．dp テーブルのサイズは $\Theta(N^3)$ であり，遷移は累積 min を用いることで $\Theta(N)$ で行えるため，時間計算量は $\Theta(N^4)$ となる．

小課題 5, 満点

街 i の部分木で最も遠い街までの深さを h_i とする．このとき dp テーブルに必要なのは $j \leqq h_i, k \leqq h_i$ の部分のみである．したがって，dp テーブルはこの部分だけ計算すればよい．よって 街 i_1, i_2 を子にもつ街 i の遷移にかかる時間計算量は $\Theta(h_{i_1} h_{i_2} \max(h_{i_1}, h_{i_2}))$ となる．$\Theta(h_{i_1} h_{i_2} \max(h_{i_1}, h_{i_2})) \subset O(h_{i_1} h_{i_2} N)$ から二乗の木 DP と同様の理由で全体の和をとると $O(N^3)$ であるため，この問題は $O(N^3)$ 時間で解くことができる．また最悪計算量も $\Theta(N^3)$ であることに注意する．子が 3 つ以上の場合も 2 つずつマージしていけばよい．