5 新しい橋 (New Bridge)

Author : 米山 瑛士

小課題 1

首都を決めた後の操作は，重み付き無向グラフの最小全域木を求めるアルゴリズムとして知られる「プリム法」である．プリム法は priority queue などを用いることで一回 $O(M \log M)$ の計算量で実行することができ，これを N 通りの首都それぞれについて行うことで，計算量は $O(NM \log M)$ となる．

小課題 2

プリム法が最小全域木を求めるアルゴリズムであったことから，ある辺によって新しく到達可能になる頂点があるのであれば，その辺は最小全域木に含まれる．したがって，最小全域木に含まれない辺は無視してよい．はじめに最小全域木を求めておき，そのグラフ上で始点を N 通り変えてプリム法を実行することで，計算量は $O(N^2 \log N)$ となる．

小課題 3

s から到達可能な島の集合は，常に区間をなす．

$s < i$ のときを考えると， s から i へ到達可能になるときには，ある $j(\leqq s)$ について，j から i までの区間が到達可能となっている．この j の値は，s から i までの辺の重みの最大値を m として，s から番号の小さい方へ見て行ってはじめて m より大きな辺が現れた地点である．i を固定して，s を段々小さい番号にしていったときには，j も同じように段々小さな番号になって行く．したがって，尺取り法の要領で，$s = i-1, i-2, \ldots, 1$ について順に j の値を求めることができる．同様の方法で $s = i+1, i+2, \ldots, N$ についても計算することができ，計算量は $O(NQ)$ となる．

小課題 4,5, 満点解法

プリム法と並んで最小全域木を求めるアルゴリズムである，クラスカル法について考える．

クラスカル法のあるステップで，連結成分 A と連結成分 B が，A に属する頂点 x と B に属する頂点 y を結ぶ辺 (x, y) によってマージされるとする．このとき， A に属する頂点 a， B に属する頂点 b について，$D_{a,b} = |A| + D_{y,b}$ と定まる．ここで，頂点 b の不便度 $D_{1,b} + D_{2,b} + \ldots + D_{N,b}$ の式に，先程の式が表す代入操作を繰り返すことによって，最終的に $|A_1| + |A_2| + \ldots$ のような形で表すことができる．（$D_{b,b} = 0$ に注意せよ．）この式に $|A|$ が現れる回数は，最小全域木を辺 (x, y) で切ったときに x 側にある頂点の総数 k と等しいことが分かる． したがって，B に含まれる頂点 b のスコアに $|A| \times k$ を一律で加算する操作を行えばよい．同様に，A に含まれる頂点 a のスコアにも $|B| \times (N - k)$ を加算する．

グラフがパスの場合，この加算操作は区間加算に相当する．値は最後に求められれば良いため，imos 法を用いることができる．

一般のグラフの場合，この加算操作は，「マージ過程を表す木」において部分木のノード全体に加算する操作に対応する．値は最後に求められれば良いため，部分木の根の部分に値を記録しておき，それらの値を足し合わせながらトップダウンに子の頂点へ伝播させてゆけばよい．

計算量は，最小全域木を求めるための辺のソートがボトルネックとなり， $O(M \log M)$ となる．