1 クラス分け (Class Division)

Author : 林 涼太郎

小課題 1

3 人の得点がすべて異なる場合を考える．3 人の得点を低い方から順に p 点，q 点，r 点としよう．このとき，$x = r$ として，進学クラスは 1 人，普通クラスは 2 人とすることになる．このとき進学クラスの生徒の得点の最低点は r 点である．

ある 2 人の得点が等しい場合を考える．制約より，3 人全員の得点が等しいということはないことに注意する．一致している 2 人の点数を p 点，もう 1 人の点数を q 点とする．このとき，p 点の生徒のみからなるクラスと q 点の生徒のみからなるクラスに分けるよりない．進学クラスの生徒の得点の最低点は $\max(p, q)$ 点である．

以上を適切に場合分けして実装する．

小課題 2

500 点，800 点，1000 点のうち生徒の得点として 2 種類しか現れない場合は，進学クラスの生徒の得点の最低点は 2 種類の得点のうち大きい方になる．

500 点，800 点，1000 点の生徒がそれぞれ存在する場合は，1000 点の生徒のみを進学クラスとするか，800 点と 1000 点の生徒を進学クラスとするかの 2 通りの分け方をそれぞれ試せばよい．問題文の通りに実際に進学クラスと普通クラスの生徒の数の差を計算し，小さくなる方を採用する（2 つの分け方で生徒数の差が等しくなる場合は 1000 点で分ける方を採用する）プログラムを書けばこの小課題の得点を得られる．

小課題 3

N が偶数である場合，得点が大きい方から $N/2$ 人を進学クラスに，小さい方から $N/2$ 人を普通クラスにする分け方が存在する．なぜならば全員の得点が異なるからである．このとき進学クラスと普通クラスの生徒の数の差は 0 となり，これが明らかに最小である．また，これが生徒数の差 0 人を達成する唯一の方法である．よって，進学クラスの生徒の得点の最小値は，$A_1, A_2, \ldots, A_N$ の中で大きい方から $N/2$ 番目の値である．

N が奇数である場合，進学クラスと普通クラスの生徒の数の差を 0 とすることはできない．差を 1 とす

るには，得点が大きい方から $(N-1)/2$ 人を進学クラスにするか，$(N+1)/2$ 人を進学クラスにするかの 2 通りの分け方が考えられるが，このうち進学クラスの生徒の数が最小となる方を採用する．よって，進学クラスの生徒の得点の最小値は，$A_1, A_2, \ldots, A_N$ の中で大きい方から $(N-1)/2$ 番目の値である．

小課題 4

$A_1, A_2, \ldots, A_N$ を好きな順番に並び替えても答えは変わらない．ソートアルゴリズムを用いて，$A_1 \leqq A_2 \leqq \cdots \leqq A_N$ である場合に問題を帰着させる．

あり得る分け方について考える．もし生徒 s が普通クラスに属するならば，生徒 $1, 2, \ldots, s-1$ も普通クラスに属するはずである．また，もし生徒 t が進学クラスに属するならば，生徒 $t+1, t+2, \ldots, N$ も進学クラスに属するはずである．以上より，$1 \leqq k \leqq N-1$ を満たすある整数 k が存在して，生徒 $1, 2, \ldots, k$ は普通クラスに，生徒 $k+1, k+2, \ldots, N$ は進学クラスに属する，という形になっていることがわかる．

$1 \leqq i \leqq N-1$ を満たす整数 i について，もし $A_i < A_{i+1}$ ならば，生徒 $1, 2, \ldots, i$ を普通クラスとし，生徒 $i+1, i+2, \ldots, N$ を進学クラスとする分け方が存在する．また，$A_i = A_{i+1}$ ならば，生徒 $1, 2, \ldots, i$ を普通クラスとし，生徒 $i+1, i+2, \ldots, N$ を進学クラスとする分け方は存在しない．

以上の考察により，あり得る分け方をすべて列挙できる．実際にそれぞれの分け方で進学クラスと普通クラスの生徒の数の差を計算し，これが最小となる分け方を求めればよい．生徒の差が最小値となる分け方が複数存在する場合は，進学クラスの生徒の数が最小となるものを選ぶことに注意する．

$A_1, A_2, \ldots, A_N$ のソートは $O(N \log N)$ 時間で実行できる．ソートの後の計算は $O(N)$ 時間で実行できる．全体の時間計算量 $O(N \log N)$ でこの問題を解くことができる．