2 究極の団子職人 (Ultimate Dango Maker)

Author : 増田 拓真

小課題 1

色 1 の団子 3 個からなる串団子がいくつ作れるかという問題となる．答えは $\left\lfloor \frac{A_1}{3} \right\rfloor$ である．

小課題 2

$|1-2| \leqq 1$ であるので色 1 の団子と色 2 の団子を好きに組み合わせて串団子を作ることができる．つまり色 1 の団子と色 2 の団子の色を区別する必要はなく，答えは $\left\lfloor \frac{A_1+A_2}{3} \right\rfloor$ である．

小課題 3

それぞれの色 i $(1 \leqq i \leqq N)$ について，色 i の団子 3 個からなる串団子をできるだけ作るのが最適である．答えは $\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N} A_i$ である．

小課題 4

以下色 c_1, c_2, c_3 の団子からなる串団子を (c_1, c_2, c_3) と表すことにする．この小課題では次のような，色 $i, i+1, i+2$ に対して $(i, i, i+1)$ と $(i+1, i+2, i+2)$ を交互に作る解が最適である．

$$(1,1,2),\ (2,3,3),\ (4,4,5),\ (5,6,6),\ \ldots,\ (i,i,i+1),\ (i+1,i+2,i+2),\ \ldots$$

よって答えは次のようになる．

$$\begin{cases} \frac{2N}{3} & (N \equiv 0 \pmod 3) \\ \frac{2(N-1)}{3} & (N \equiv 1 \pmod 3) \\ \frac{2(N-2)}{3} + 1 & (N \equiv 2 \pmod 3) \end{cases}$$

なお，小課題 1 から小課題 4 までは $\left\lfloor \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N} A_i \right\rfloor$ を出力しても良い．

小課題 5

色 i の団子と色 $i+1$ の団子を共に使っている串団子は高々 1 個であるとしてよい．もし仮にそのような串団子が 2 個以上あったとすると，串団子の総数と使っている団子を変えずに，以下のうちのいずれかによってそのような串団子を 1 個以上減らすことができるからである．

- $(i,i,i+1)$ と $(i,i,i+1)$ が存在するなら (i,i,i) と $(i,i+1,i+1)$ に置き換える．
- $(i,i,i+1)$ と $(i,i+1,i+1)$ が存在するなら (i,i,i) と $(i+1,i+1,i+1)$ に置き換える．
- $(i,i+1,i+1)$ と $(i,i+1,i+1)$ が存在するなら $(i,i,i+1)$ と $(i+1,i+1,i+1)$ に置き換える．

よって次のような形の最適解を見つければよい．

$(1,1,1)$, …, $(1,1,1)$, $(1,1,2)$ か $(1,2,2)$ または無し,
$(2,2,2)$, …, $(2,2,2)$, $(2,2,3)$ か $(2,3,3)$ または無し,
…,
$(N-1,N-1,N-1)$, …, $(N-1,N-1,N-1)$, $(N-1,N-1,N)$ か $(N-1,N,N)$ または無し,
(N,N,N), …, (N,N,N)

以上より，色の小さい団子から貪欲に条件を満たすよう串団子を選ぶことで，この小課題を解くことができる．具体的には $i=1,2,\ldots,N-1$ について順に，(i,i,i) をできるだけ作り，残りで $(i,i,i+1)$ が作れるなら作り，そうでない場合は $(i,i+1,i+1)$ が作れるなら作る，という操作を繰り返せばよい．最後に色 N の団子で (N,N,N) をできるだけ作る．

時間計算量は最終的に作られる団子の個数と同じで，$\Theta\left(\sum_{i=1}^{N} A_i\right)$ である．

満点

$(i,i,i),\ldots,(i,i,i)$ の部分を貪欲にいくつ串団子を作れるかを計算する部分は，小課題 3 と同様，残っている色 i の団子の個数を r として $\left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor$ とまとめて計算できる．この解法の時間計算量は $\Theta(N)$ である．