4 買い物 3 (Shopping 3)

Author : 平木 康傑

この解説では，$\lfloor x \rfloor$ で x 以下の最大の整数を，$\lceil x \rceil$ で x 以上の最小の整数を表す．

小課題 1

$N = 1$ という制約下では，クーポンを使用する枚数 k の範囲を以下のように分けてそれぞれ解くことができる．

- $A_i - D_j k \geqq 0$ が成り立つ範囲 (すなわち $k \leqq \lfloor A_i / D_j \rfloor$ の範囲) では，払う金額は $A_i + (C_j - D_j)k$ である．このとき，$C_j - D_j \geqq 0$ であれば $k = 0$ のときが，$C_j - D_j < 0$ であれば $k = \lfloor A_i / D_j \rfloor$ のときが最小値をとる．
- $A_i - D_j k \leqq 0$ が成り立つ範囲 (すなわち $k \geqq \lceil A_i / D_j \rceil$ の範囲) では，払う金額は $C_j k$ である．このとき，$k = \lceil A_i / D_j \rceil$ のときが最小値をとる．

上の 2 つの範囲における最小値のうち小さいほうが答えとなる．

小課題 2

$D_j \geqq 1$ より，クーポンを使用する枚数は高々 $\max A_i$ としてよい．

$0 \leqq k \leqq \max A_i$ を満たす整数 k に対して，各商品の金額 $\max(0, A_i - D_j k)$ と追加料金 $C_j k$ との総和をとることで払総額額が求まる．これは各質問について $O(N \max A_i)$ 時間で計算できる．

全体の時間計算量は $O(NQ \max A_i)$ となる．

小課題 3

A_i の順番は答えに影響しないので，昇順にソートして $A_1 \leqq A_2 \leqq \cdots \leqq A_N$ が満たされるものとする．また，便宜上 $A_0 = 0$，$A_{N+1} = +\infty$ とする．

クーポンを使用する枚数 k が $A_s \leqq D_j k \leqq A_{s+1}$ を満たすとき，商品 i の金額は $i \leqq s$ のとき 0 に，$i > s$ のとき $A_i - D_j k$ になる．したがって，払う総額は $\displaystyle\sum_{i=s+1}^{N} (A_i - D_j k) + C_j k = \sum_{i=s+1}^{N} A_i + (C_j - D_j(N-s))k$ として求まる．

$D_j = 1$ という制約下では，s に対応する k の範囲は $A_s \leqq k \leqq A_{s+1}$ と書けて，払う総額は $\sum_{i=s+1}^{N} A_i + (C_j - (N-s))k$ と書ける．この範囲において，$(C_j - (N-s)) < 0$ であれば $k = A_{s+1}$ のときが，$(C_j - (N-s)) \geqq 0$ であれば $k = A_s$ のときが最小値をとる．よって，これを $0 \leqq s \leqq N$ を満たす各 s について求め，それらの最小値をとることで答えが得られる．各 s での $\sum_{i=s+1}^{N} A_i$ の値をあらかじめ計算しておくことで，前計算 $O(N^2)$，各質問 $O(N)$ で処理することができ，全体の時間計算量は $O(N^2 + NQ)$ となる．

小課題 4

前の小課題と同様，$A_0 = 0 < A_1 \leqq A_2 \leqq \cdots \leqq A_N < A_{N+1} = +\infty$ とする．

$x = D_j k$ とおくと，クーポンを使用する枚数 $k = \dfrac{x}{D_j}$ が $A_s \leqq x \leqq A_{s+1}$ を満たすときの払う総額は以下のように書ける．

$$\sum_{i=s+1}^{N} A_i + \left(\frac{C_j}{D_j} - (N-s)\right) x \tag{1}$$

すべての $s = 0, 1, \ldots, N$ について，$A_s \leqq x \leqq A_{s+1}$ を満たす x に対し式 (1) で表される値をとるような関数を $f(x)$ とおく．このとき，求める答えは D_j の倍数である非負整数 x に対する $f(x)$ の最小値である．

$\dfrac{C_j}{D_j} - (N-s) < 0$ (すなわち $s < N - \left\lfloor \dfrac{C_j}{D_j} \right\rfloor$) を満たす s において，$A_s \leqq x \leqq A_{s+1}$ の範囲で $f(x)$ は広義単調減少する．逆に，$\dfrac{C_j}{D_j} - (N-s) \geqq 0$ (すなわち $s \geqq N - \left\lfloor \dfrac{C_j}{D_j} \right\rfloor$) を満たす s において，$A_s \leqq x \leqq A_{s+1}$ の範囲で $f(x)$ は広義単調増加する．このことから，$s_{\min} := N - \left\lfloor \dfrac{C_j}{D_j} \right\rfloor$ とおくと，以下のことが成り立つ．

- $s_{\min} \leqq 0$ の場合，$f(x)$ は常に広義単調増加．したがって，$x = 0$ のときが最小値をとる．
- $s_{\min} > 0$ の場合，$f(x)$ は $x \leqq A_{s_{\min}}$ の範囲で広義単調減少するので，$x = \lfloor A_{s_{\min}} / D_j \rfloor \cdot D_j$ のときがこの範囲の最小値をとる．また，$f(x)$ は $x \geqq A_{s_{\min}}$ で広義単調増加するので，$x = \lceil A_{s_{\min}} / D_j \rceil \cdot D_j$ のときがこの範囲の最小値をとる．これら 2 つの値のうち小さいほうが，全体の最小値となる．

よって各質問において，$s_{\min}$ の値を求め，上で挙げた点 x について $f(x)$ を愚直に求めて最小値をとることで，$O(N)$ 時間で質問に答えることができる．全体の時間計算量は $O(N \log N + NQ)$ となる．

小課題 5

ある点 x における $f(x)$ の計算が高速にできれば，小課題 4 のアプローチを高速化することができる．

各 s における $\sum_{i=s+1}^{N} A_i$ の値を列挙することは，累積和と呼ばれるテクニックによって $O(N)$ 時間で可能で

ある．これを前計算することで，$f(x)$ を計算する際に毎回 $\sum_{i=s+1}^{N} A_i$ の値を $\Omega(N)$ 時間かけて計算する必要がなくなる．以下では $B_{s+1} := \sum_{i=s+1}^{N} A_i$ とおく．

$D_j = 1$ という制約下では，$x = A_{s_{\min}}$ のときのみを計算すればよい．このとき

$$f(A_{s_{\min}}) = B_{s+1} + \left(\frac{C_j}{1} - (N - A_{s_{\min}})\right)x \tag{2}$$

であり，これをそのまま計算すれば $O(1)$ 時間で $f(A_{s_{\min}})$ の値が求まる．

全体の時間計算量は $O(N \log N + Q)$ となる．

小課題 6

ある点 x に対して $x \leqq A_{s+1}$ を満たす最小の s の値が高速に求まれば，$f(x)$ の計算を高速化することができる．

$x > A_N$ のときは $s = N$ と判定するとして，以下の前計算によって $0 < x \leqq A_N$ の範囲の x に対応する s の値 s_x を得ることができる．

- 各 $i = 0, \ldots, N-1$ に対して，$A_i < x \leqq A_{i+1}$ の範囲の x に対応する s の値 s_x を i とする

この前計算には $\Theta(\max A_i)$ 時間かかる．

この s_x の値を用いると，$f(x)$ の計算は $O(1)$ 時間でできる．

全体の時間計算量は $O(N \log N + \max A_i + Q)$ となる．$\max A_i \leqq 10^6$ という制約下では十分高速である．

満点解法

小課題 6 冒頭の方針を引き継ぐ．$x \leqq A_{s+1}$ を満たす最小の s の値は二分探索によって求めることができ，これにより $f(x)$ の計算は $O(\log N)$ 時間でできる．

全体の時間計算量は $O(N \log N + Q \log N)$ となり，十分高速である．