テレポーター(Teleporter)

解説：星井智仁

問題概要

ビ太郎は最初，部屋 1 にいる

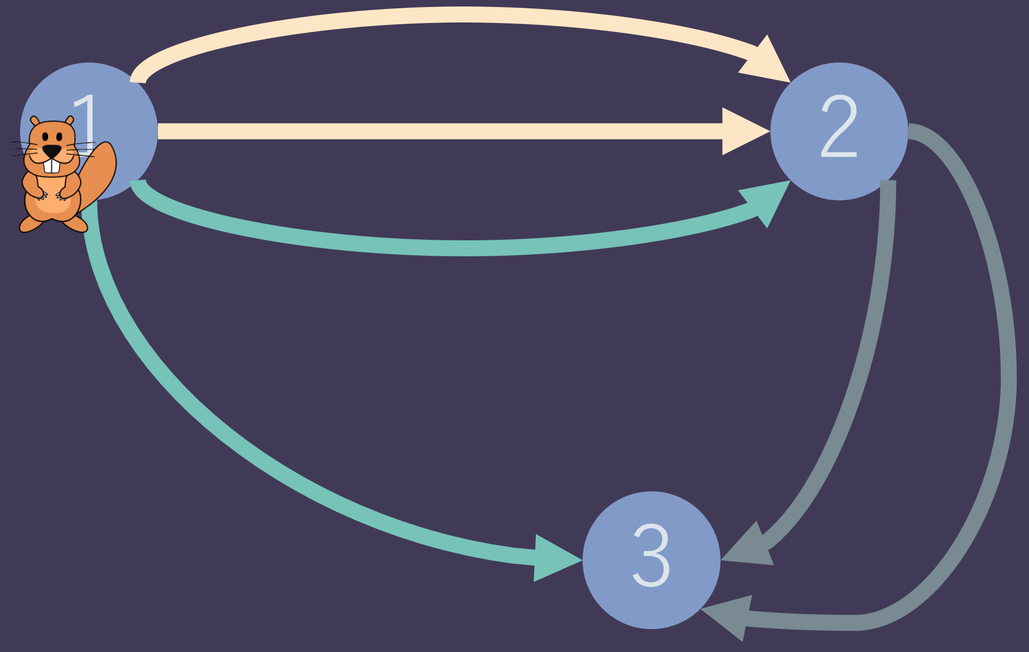
以下のラウンドを繰り返す．ビ太郎は行われるラウンドの回数をなるべく大きく，ビバ子は回数をなるべく小さくしたい

1. ビ太郎が部屋にあるテレポーターのうち 1 つを選ぶ
2. ビバ子がそのテレポーターの行き先を部屋 $P_{i,j}$，部屋 $Q_{i,j}$ のいずれかに設定する
3. ビ太郎がその部屋に移動する
4. もしビ太郎が部屋 N に移動したならゲームは終了する

無限ラウンド続くならそれも判定せよ

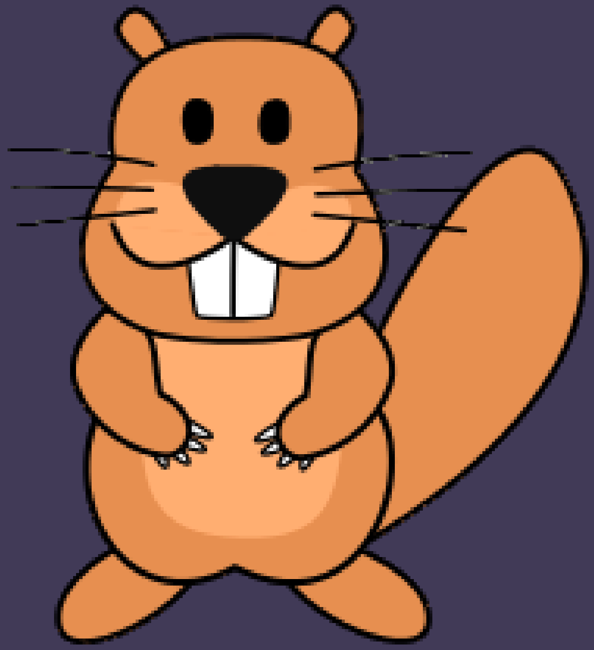
問題概要

サンプル 1



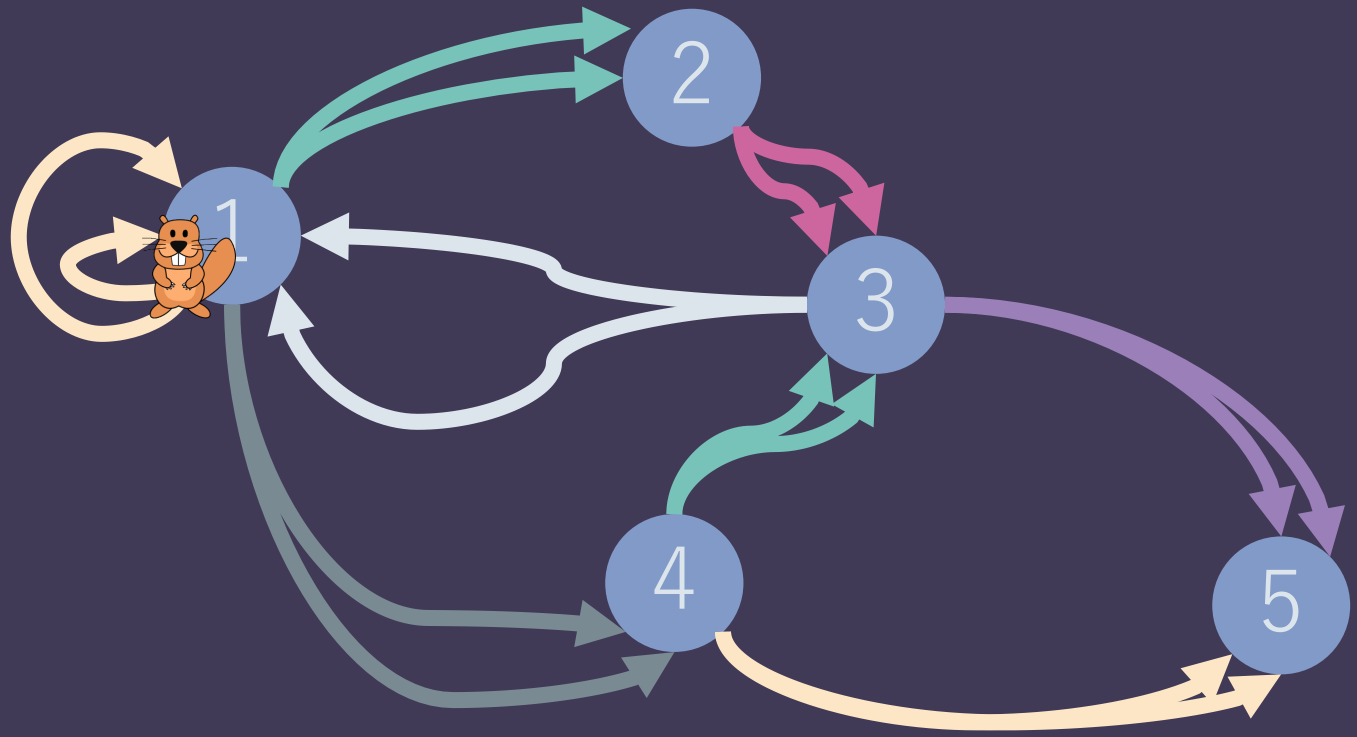
小課題

1. $P_{i,j} = Q_{i,j}$
2. $P_{i,j} > i,\ Q_{i,j} > i$
3. $\sum A_i \leq 2000$
4. $A_i = 1$
5. 追加の制約はない



小課題1 （$P_{i,j}=Q_{i,j}$）

サンプル 3



小課題1 （$P_{i,j}=Q_{i,j}$）

$P_{i,j}=Q_{i,j}$ が意味すること

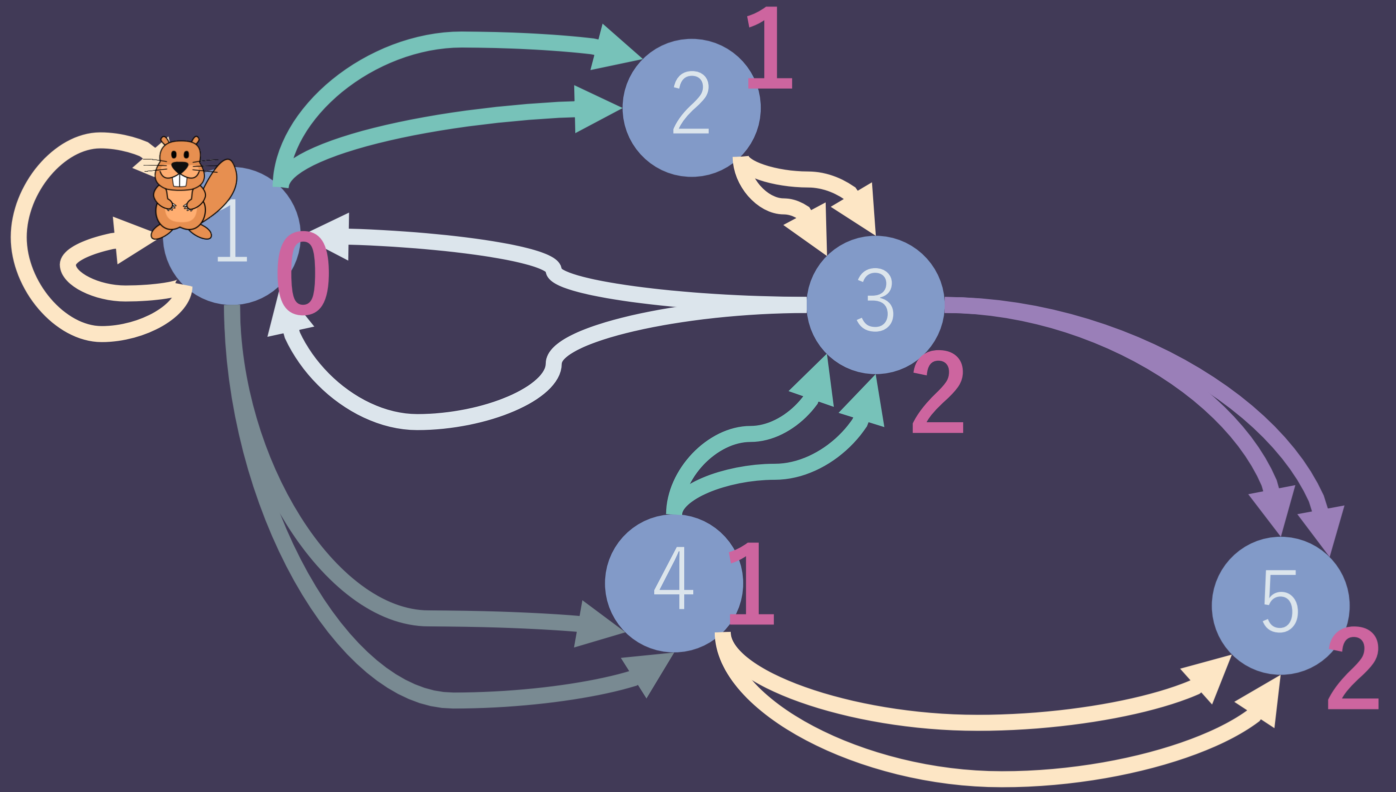
→ビバ子の意思が関与できない

→ビ太郎の思うままに進める

小課題1 （$P_{i,j}=Q_{i,j}$）

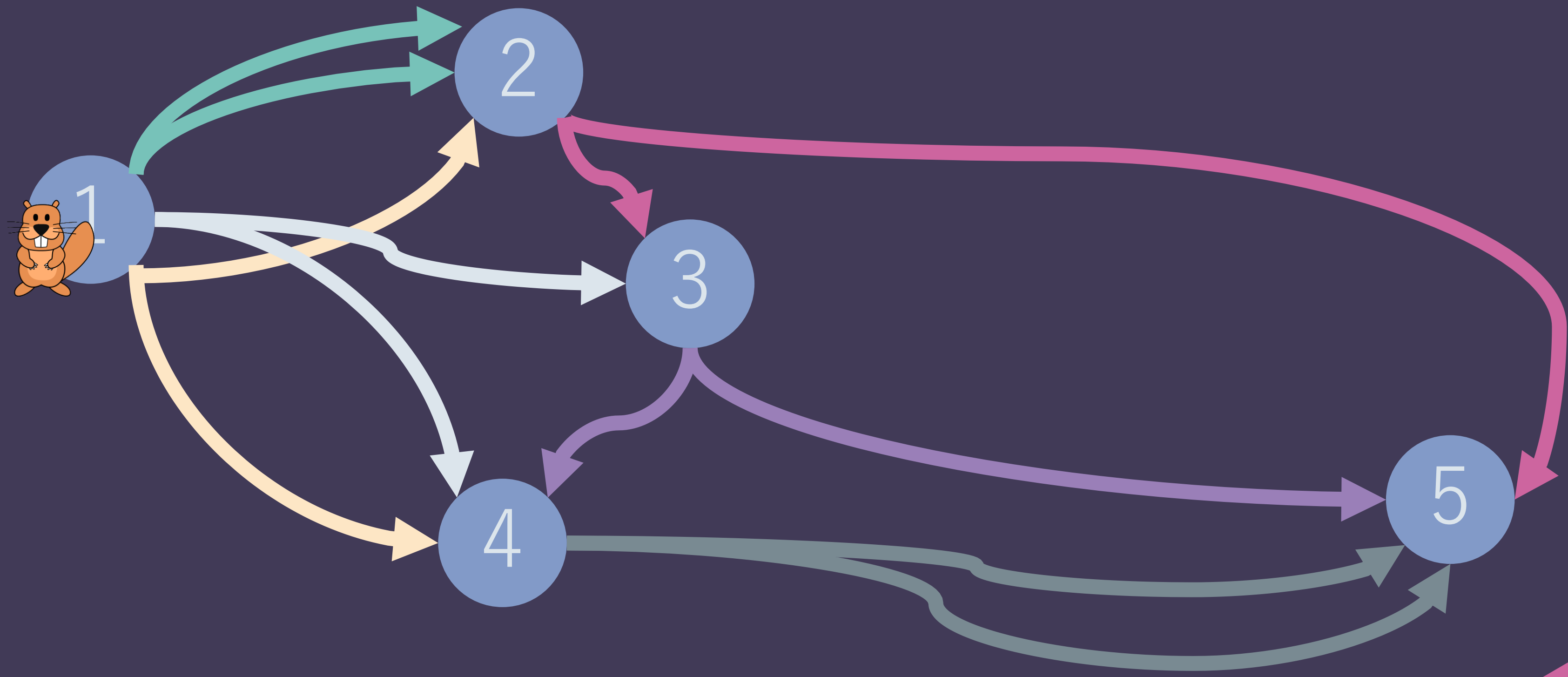
サンプル 3

最短経路問題を解く BFSをして，計算量は $O(N+\Sigma A_i)$



小課題 2 （$P_{i,j}>i,Q_{i,j}>i$）

$P_{i,j}>i,Q_{i,j}>i$



小課題 2 （$P_{i,j}>i,Q_{i,j}>i$）

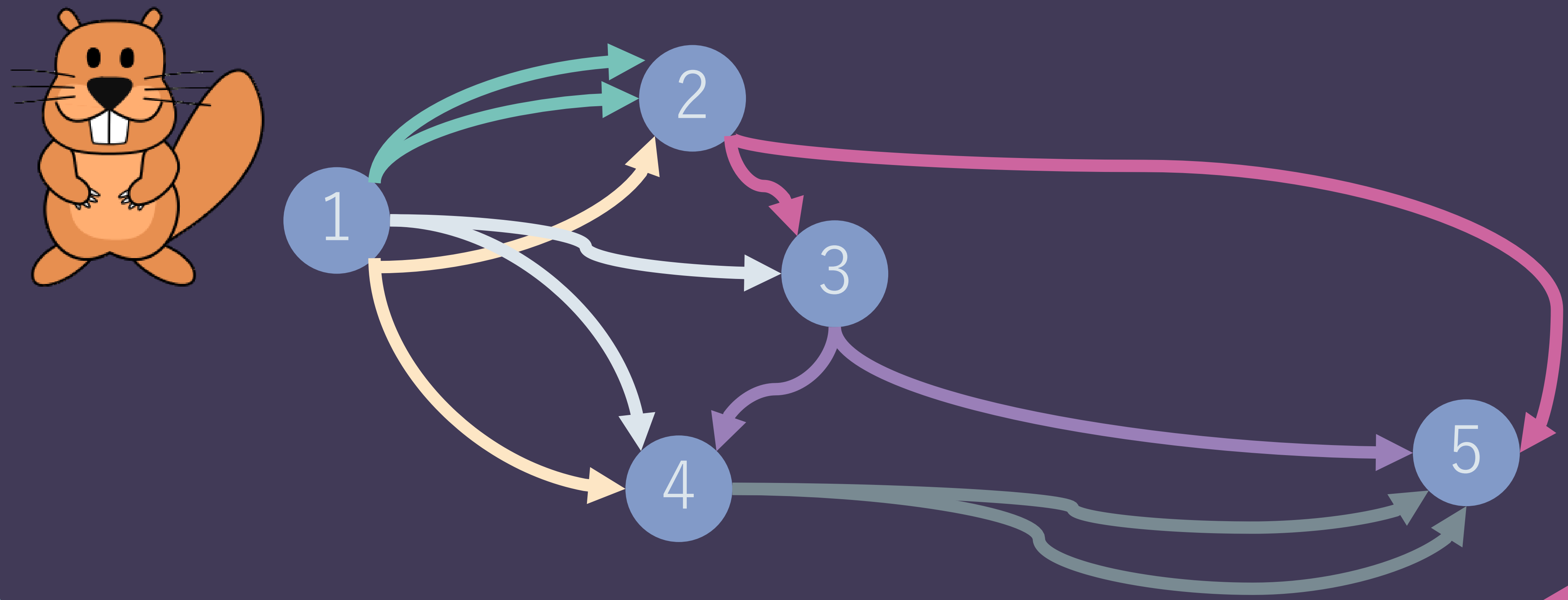
$P_{i,j}>i,Q_{i,j}>i$

→DAG（有向非巡回グラフ）と呼ばれるもの

→？？？

小課題 2 （$P_{i,j}>i, Q_{i,j}>i$）

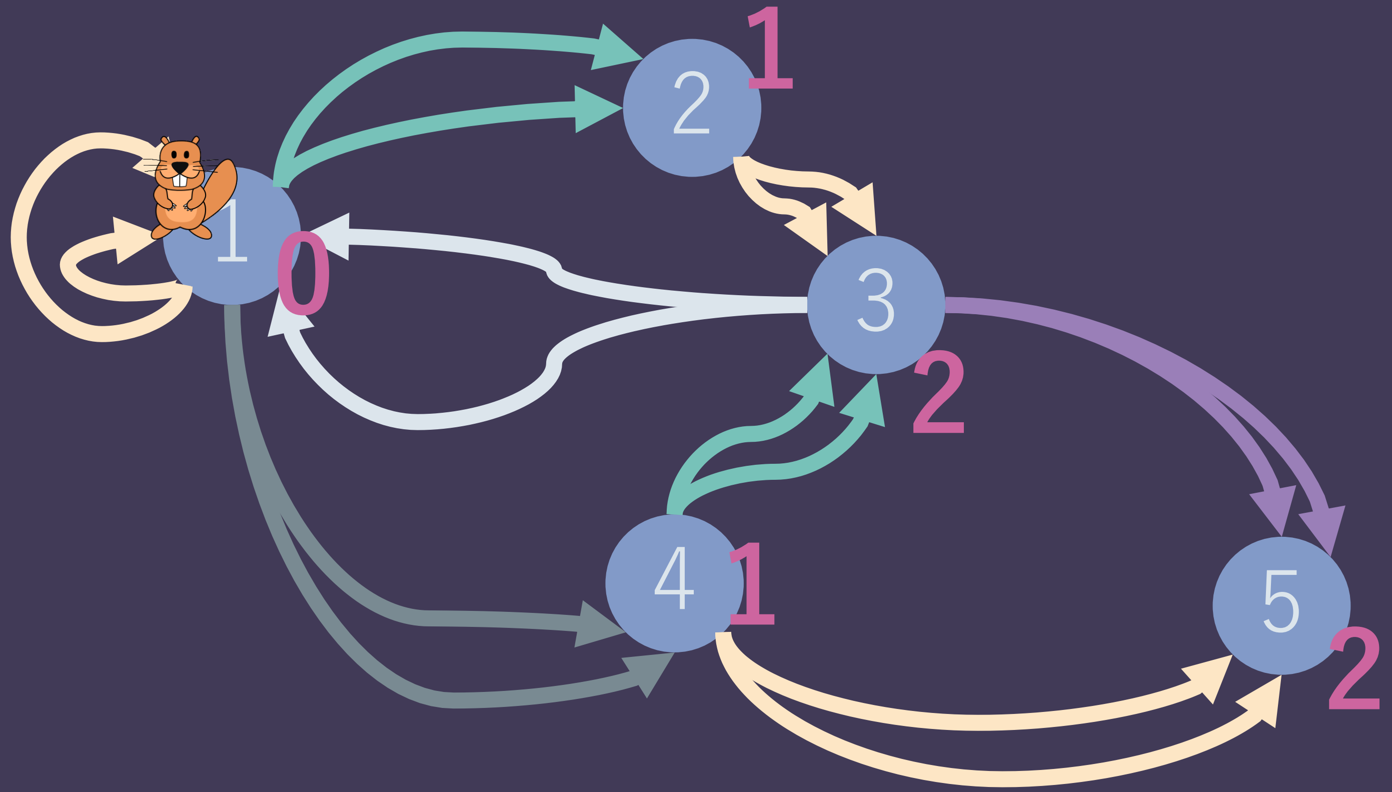
じっと眺める



小課題 2 （$P_{i,j}>i, Q_{i,j}>i$）

わからないときは前に戻って考える

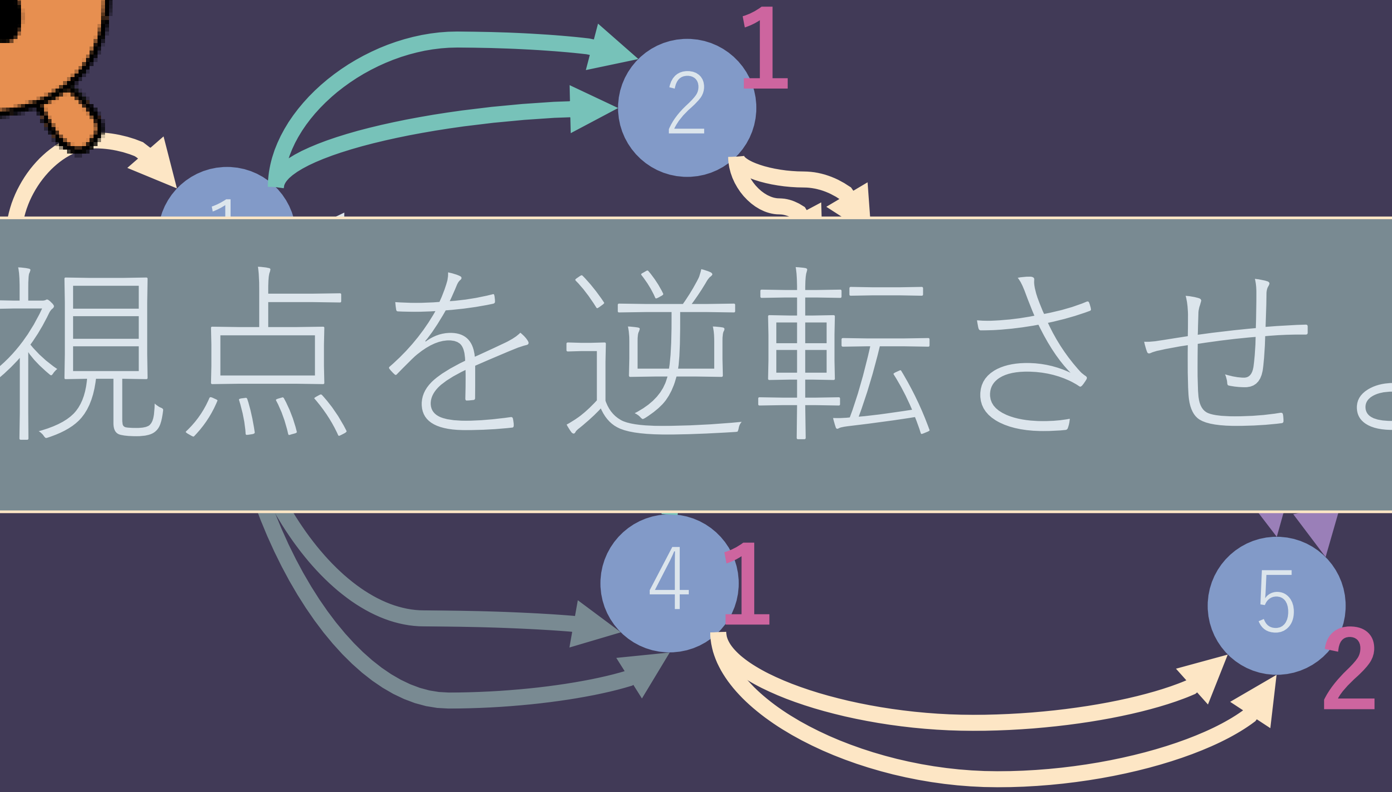
小課題1では，BFSをして，計算量は $O(N+\Sigma A_i)$



小課題 2 （$P_{i,j}>i,Q_{i,j}>i$）

いときは前に戻って考える

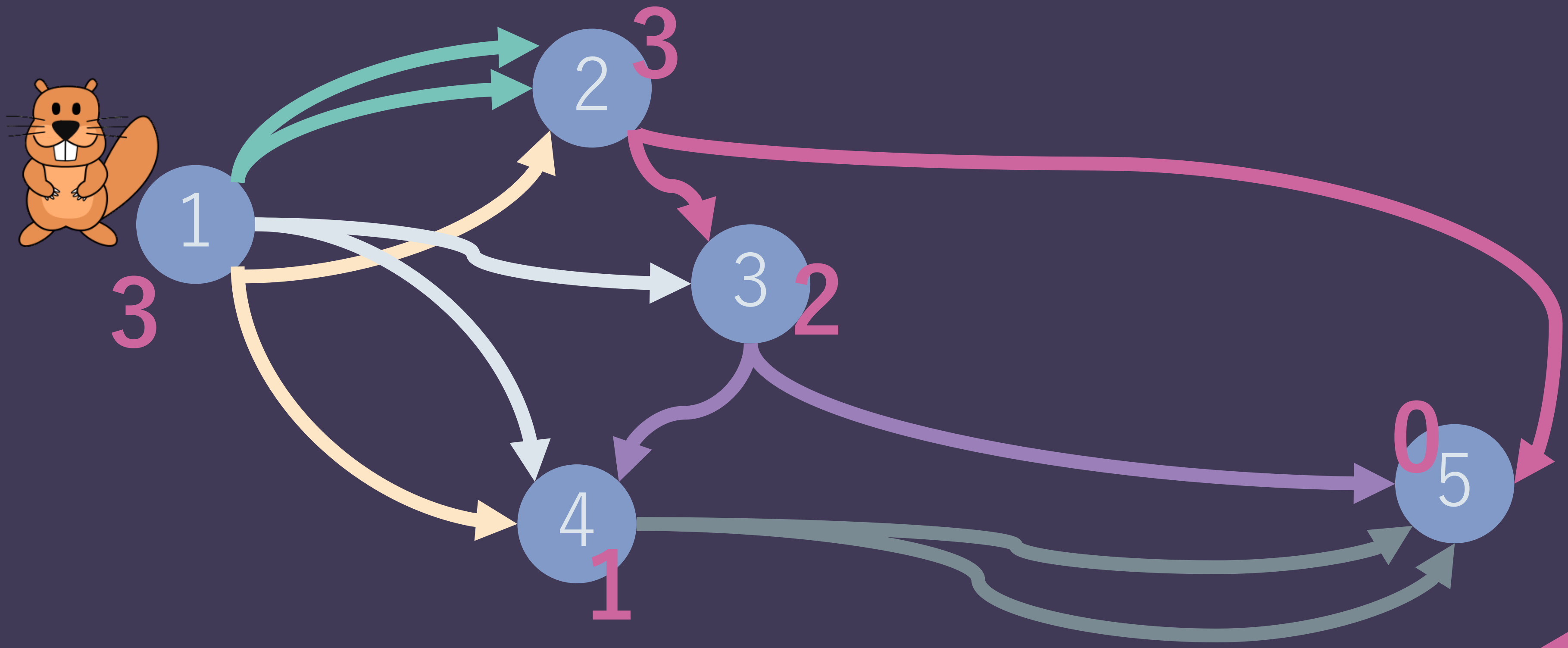
では，BFSをして，計算量は O(N+ΣA$_i$)



視点を逆転させよう

小課題 2 （$P_{i,j}$>i,$Q_{i,j}$>i）

逆側からなら，頂点番号の大きいほうから順に距離を決められる



小課題 2 （$P_{i,j}$>i,$Q_{i,j}$>i）

逆側からなら，番号の大きい頂点から順に距離を決められる

具体的には,
以下のように頂点の番号iが大きいほうから更新を行う

距離[i]←min(距離[i], max(距離[$P_{i,j}$], 距離[$Q_{i,j}$])+1)

計算量はO(N+ΣA)

小課題 3 （$\sum A_i \leq 2000$）

小課題2では「頂点番号の大きい方から」距離を確定させていた

この小課題ではNが小さいかつ$\sum A_i$が小さいので，「距離が確定している頂点」を求めるのに毎回計算量O(N) かけても問題ない

小課題 3 （$\Sigma A_i \leq 2000$）

「距離が確定していない頂点」について「暫定の距離」を求める

最初 inf に初期化しておいて，以下のような更新を毎回全てのテレポーターについて行う

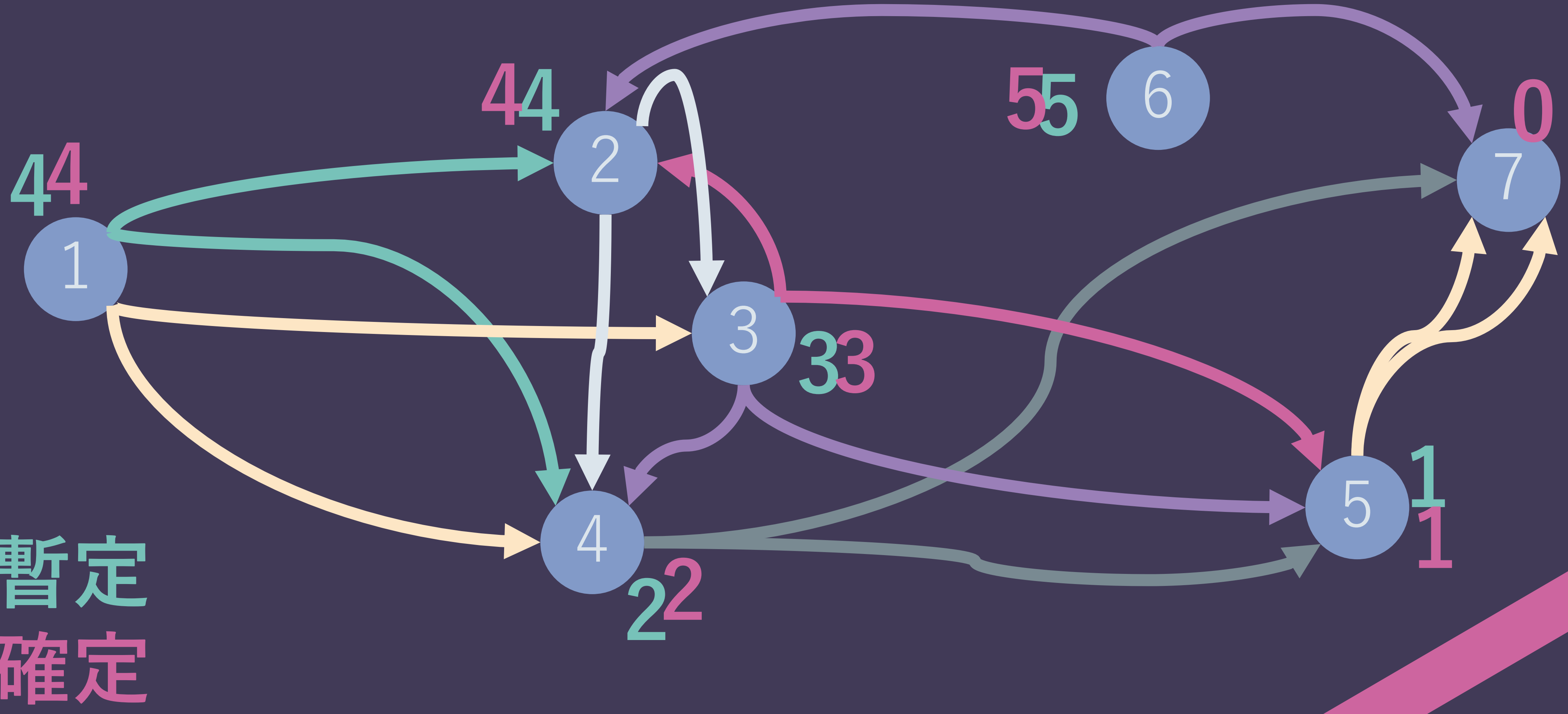
頂点$P_{i,j}$，$Q_{i,j}$のいずれも距離が確定している場合に限り，
暫定の距離[i]←min(暫定の距離[i], max(距離[$P_{i,j}$], 距離[$Q_{i,j}$])+1)

距離が確定していない頂点のうち，最も暫定の距離が小さい頂点を「距離が確定している頂点」とする

もし頂点 1 の距離が確定しない場合，答えは無限（-1と出力）

計算量は$O(N(N+\Sigma A_i))$

小課題 3 （$\Sigma A_i \leq 2000$）

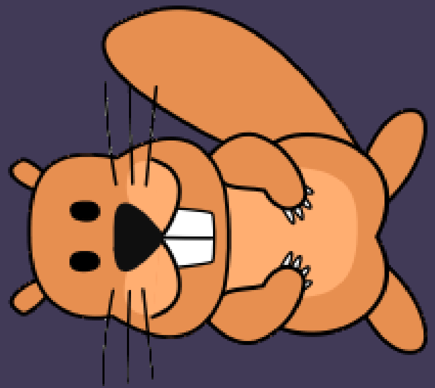


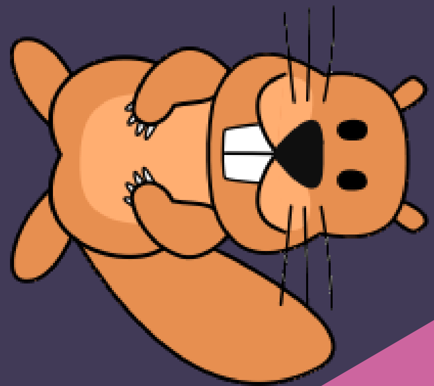
小課題 4 （$A_i=1$）

$A_i=1$

→ビ太郎の戦略は，存在するただ一つのテレポーターを選ぶだけ

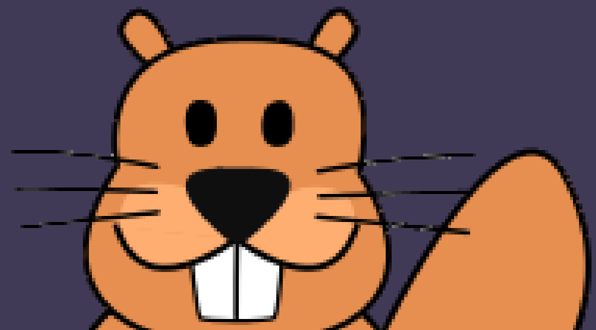
→ビバ子が全てを左右する





小課題 4　(A_i=1)

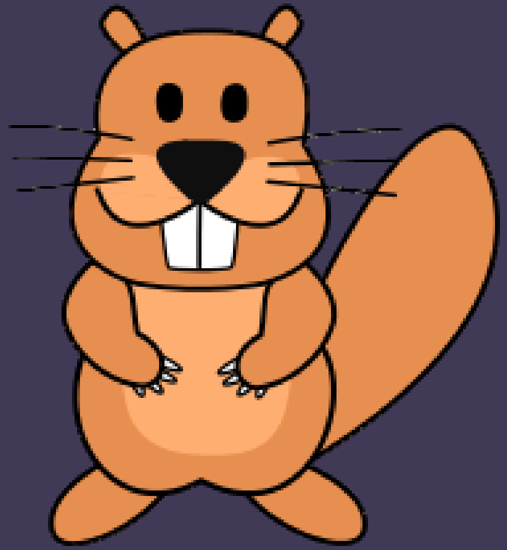
小課題2や3で紹介した方法と似たように，後ろから解く方法もありますが，ここでは（満点には結びつかないけれど）前から解く方法を紹介します



小課題 4 （A_i＝1）

ビバ子の思うままにビ太郎を動かせる

→ループに突入させたい，突入させられるループがなければなるべく長いルートを通りたい



小課題 4 （A_i＝1）

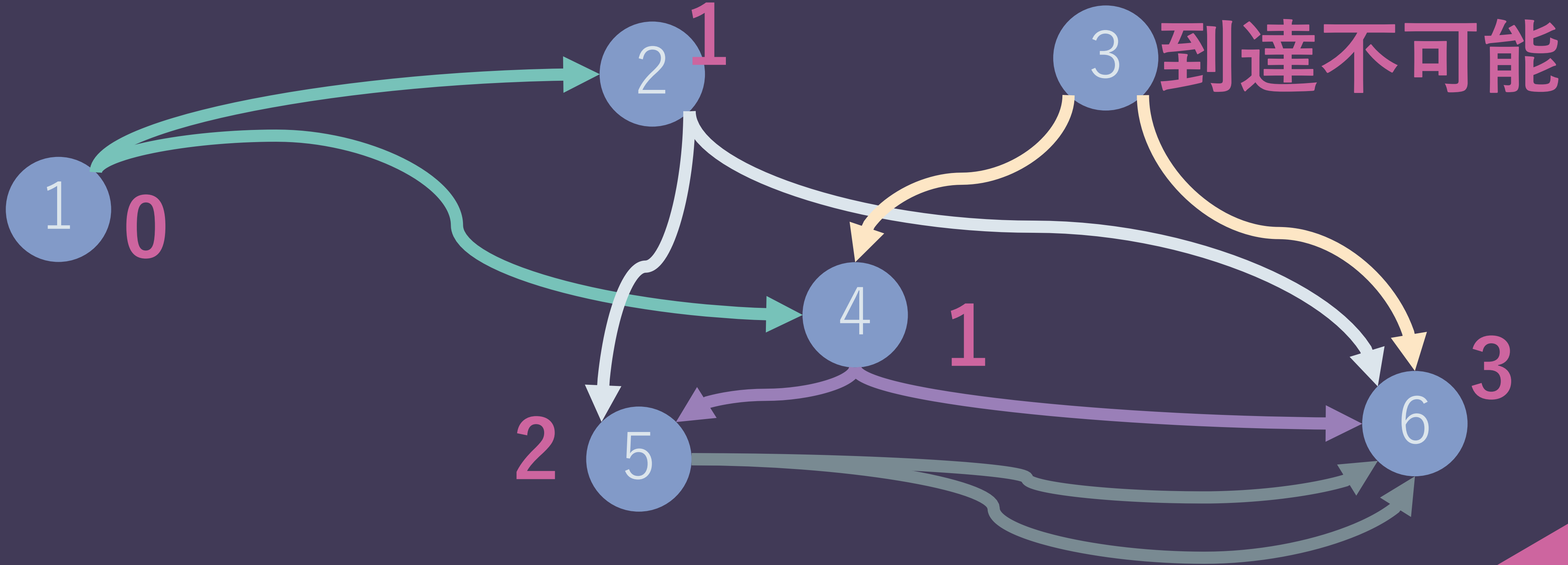
ループの検出方法

「強連結成分分解」というものがあります.
詳しくは調べてください.

ループがなかった場合，あっても頂点 1 からたどり着けない場合はDAG（有向非巡回グラフ）として扱うことができます.
頂点番号を振りなおして小課題 2 と同じようにも解けますし，もう少し簡単な方法もあります.

小課題 4 （A_i＝1）

前側から求めることができます.
（頂点番号は振りなおしたものと思ってください）



小課題 5 （満点）

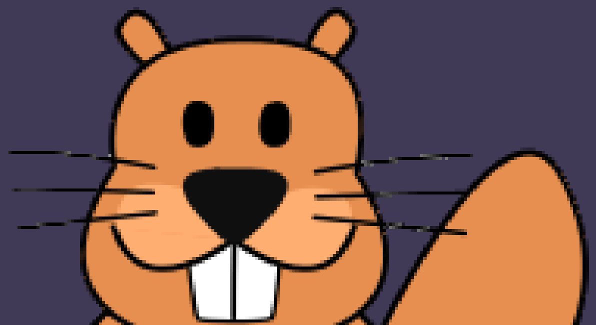
小課題 3 を思い出そう

この小課題ではNが小さいかつΣA_iが小さいので，「距離が確定している頂点」を求めるのに毎回計算量O(N) かけても問題ない

→毎回計算量O(N)かける必要はあるか？

以下のような更新を毎回全てのテレポーターについて行う

→全てのテレポーターについて行う必要はあるか？



小課題 5 （満点）

小課題 3 を思い出そう

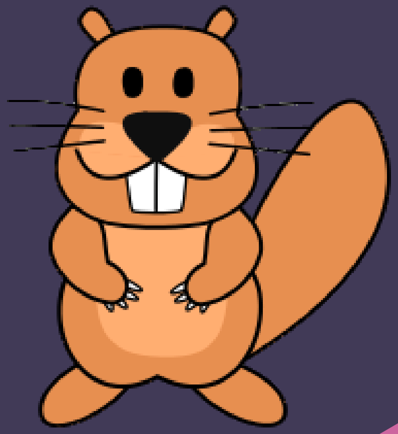
- この小課題ではNが小さいかつΣA_iが小さいので，「距離が確定している頂点」を求めるのに毎回計算量O(N) かけても問題ない

→毎回計算量O(N)かける必要はあるか？

- 以下のような更新を毎回全てのテレポーターについて行う

→全てのテレポーターについて行う必要はあるか？

→更新した時だけ見ればよい



小課題５（満点）

更新した時だけ見ればよい

「頂点の距離」は小さい順に確定していく

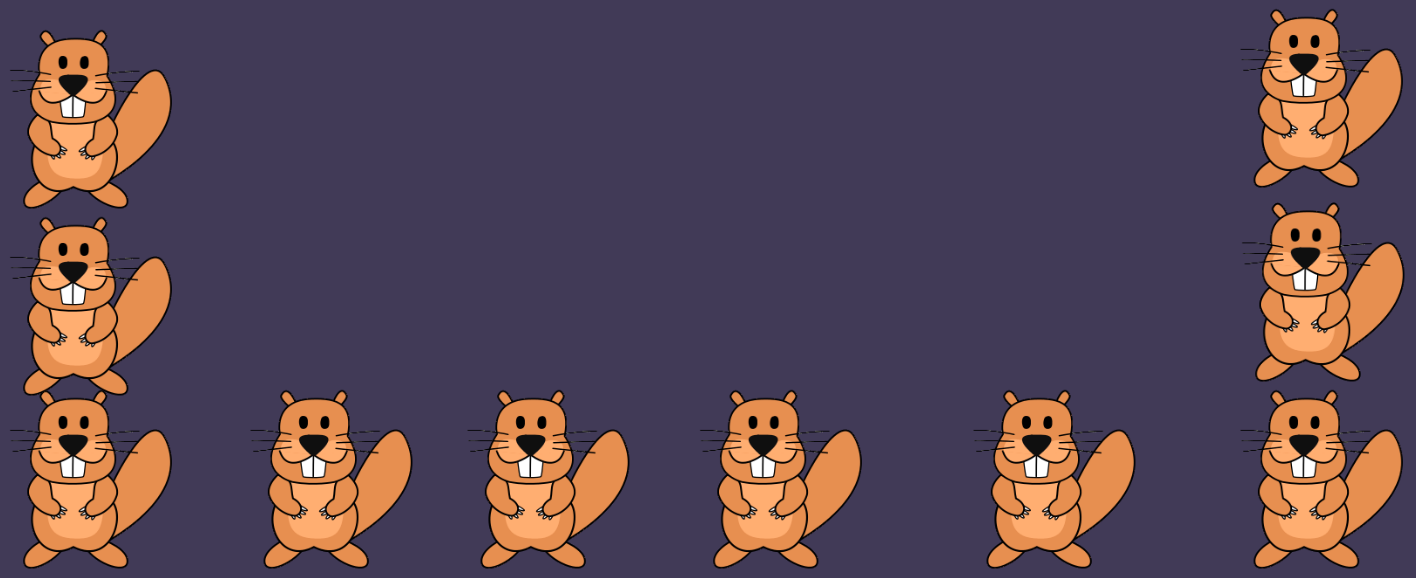
頂点$P_{i,j}$，$Q_{i,j}$のいずれも距離が確定している場合に限り，
暫定の距離[i]←min(暫定の距離[i], max(距離[$P_{i,j}$], 距離[$Q_{i,j}$])+1)

→頂点$P_{i,j}$，$Q_{i,j}$の両方の距離が確定する瞬間のみに更新しても問題ない

→テレポーターごとに「頂点$P_{i,j}$を見たか」「頂点$Q_{i,j}$を見たか」を記憶しておき，どちらのフラグもTrueになった瞬間に更新するのが良い

→BFS（幅優先探索）で計算量$O(N+\Sigma A_i)$で解けました

得点分布



0点 13点 32点 54点 62点 65点 100点