

# 最後の戦い 解説

情報オリンピック春季トレーニング 4日目

2023年3月22日

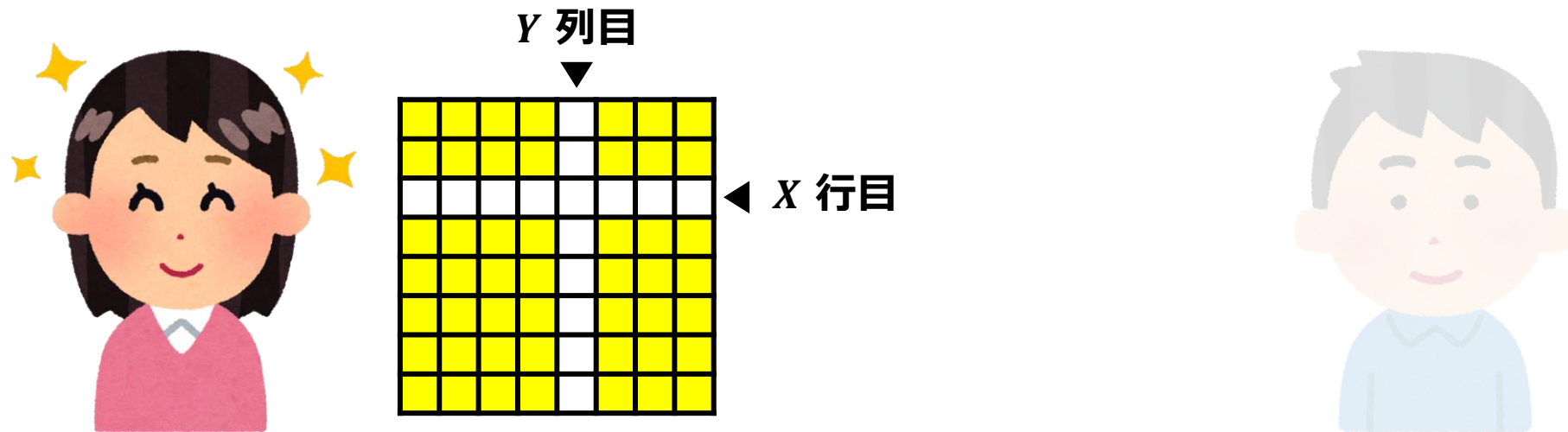
米田優峻 (@e869120)



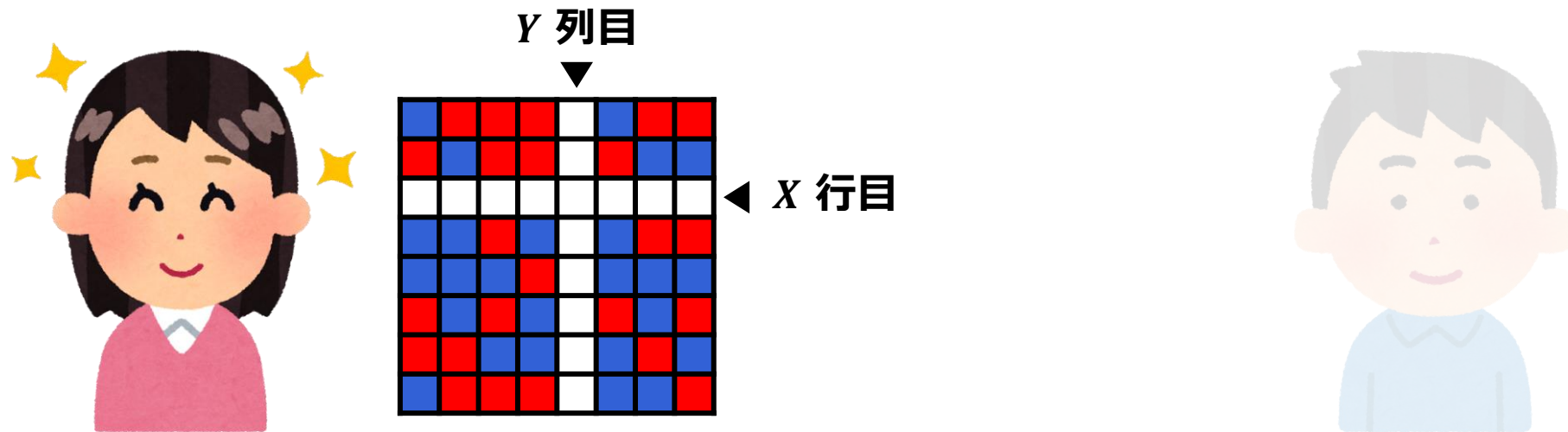
AAAABBBBBAB...



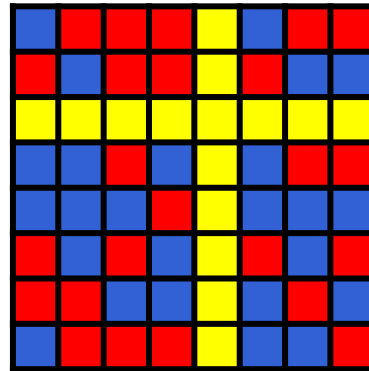
**Anna は Bruno に「長さ  $N$  の AB 文字列」を伝えたいです  
ただし、決められた方法で伝えなければなりません**



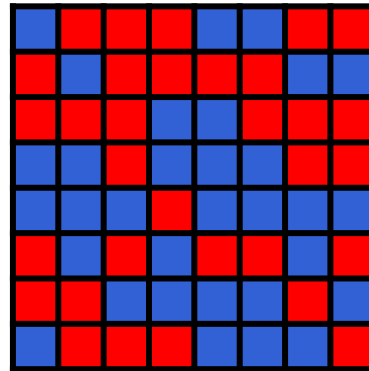
まず、Anna は  $8 \times 8$  のマス目の  $X$  行目・ $Y$  列目以外の  
49 個のマスに、青か赤で色を塗ります



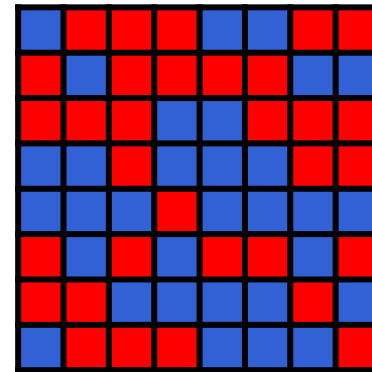
まず、Anna は  $8 \times 8$  のマス目の  $X$  行目・ $Y$  列目以外の  
49 個のマスに、青か赤で色を塗ります



次に、ビ太郎が残りの 15 マスに青か赤で色を塗ります  
(Anna にも Bruno にも見えない場所で塗ります)



次に、ビ太郎が残りの 15 マスに青か赤で色を塗ります  
(Anna にも Bruno にも見えない場所で塗ります)

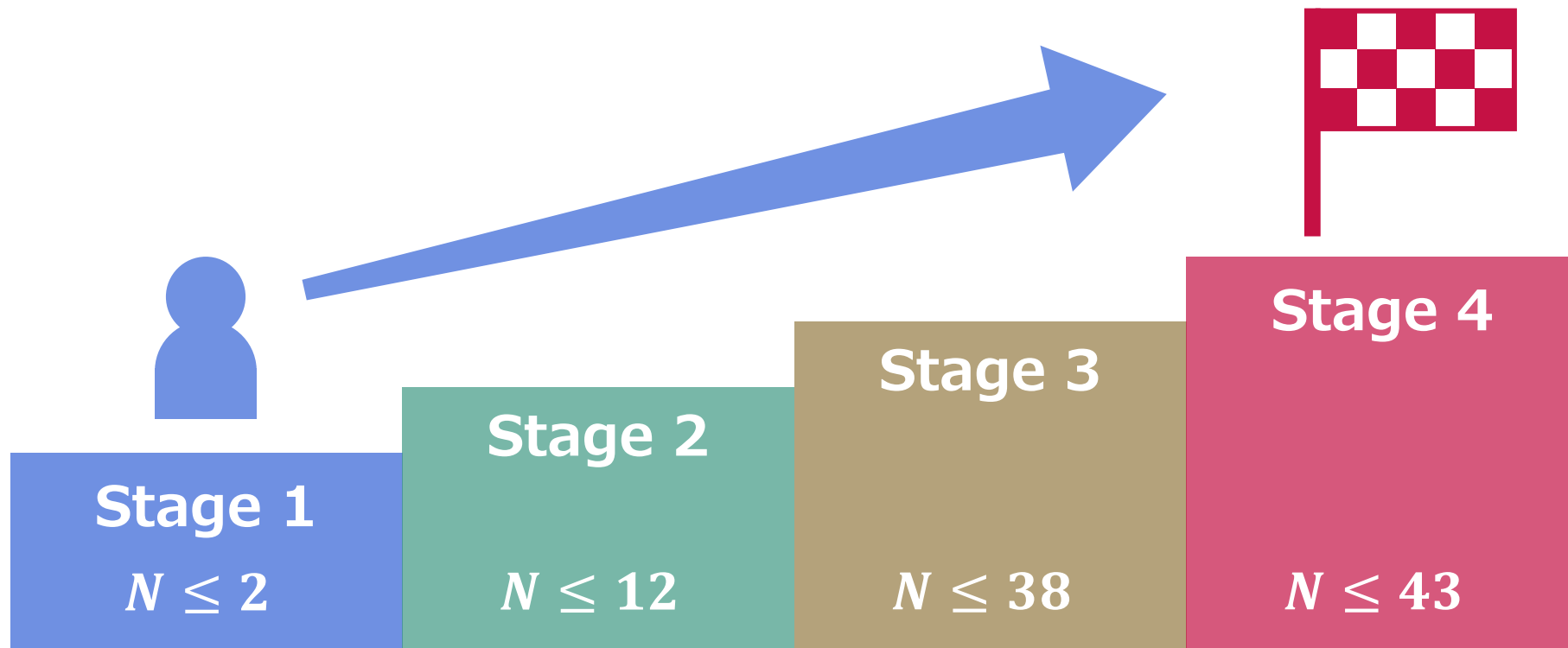


最後に、Bruno がマス目を見ます ( $x, y$  の値は見えません)  
長さ  $N$  の文字列を正しく当ててください

より長い文字列でも当てられた場合、高得点が得られます

**あなたはどこまで行けますか？**





# Stage 1

**アイデア : 赤の個数で識別する**

Anna

- 文字列が A ならば、全部青で塗る
- 文字列が B ならば、全部赤で塗る

Bruno

- 赤が 32 個以下のときに限り「A」と判定

# 1 $N = 1$ の解法：具体例

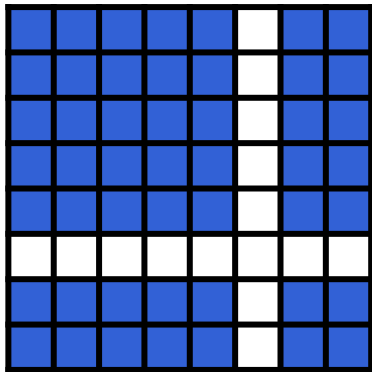
12 / 105

**例** 文字列  $A$  を伝えたい場合

# 1 $N = 1$ の解法 : 具体例

13 / 105

**例** 文字列 A を伝えたい場合

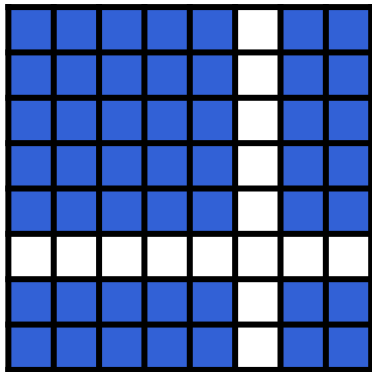


Annaは全部  
青で塗る

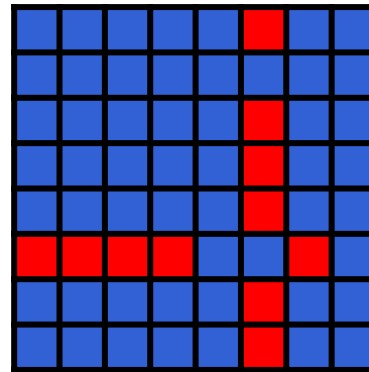
# 1 $N = 1$ の解法 : 具体例

14 / 105

例 文字列 A を伝えたい場合



Annaは全部  
青で塗る

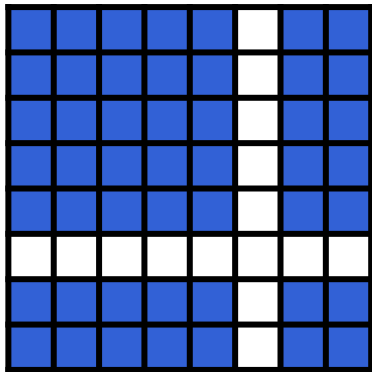


ビ太郎が残りの  
マスを塗る

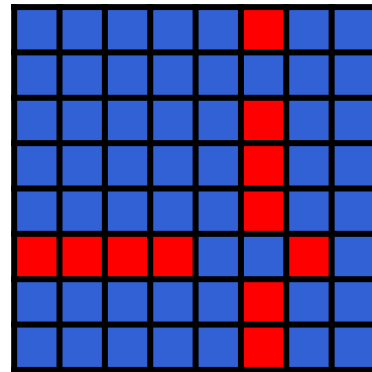
# 1 $N = 1$ の解法：具体例

15 / 105

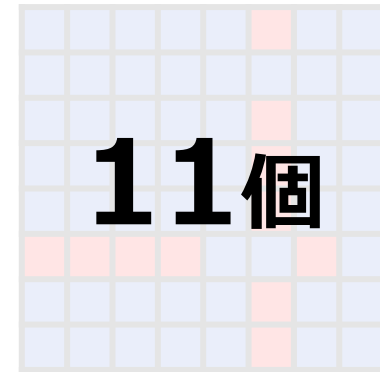
例 文字列 A を伝えたい場合



Annaは全部  
青で塗る



ビ太郎が残りの  
マスを塗る



赤の個数  $\leq 32$   
Brunoは「A」と判定

11個

# 1 $N = 1$ の解法：具体例

16 / 105

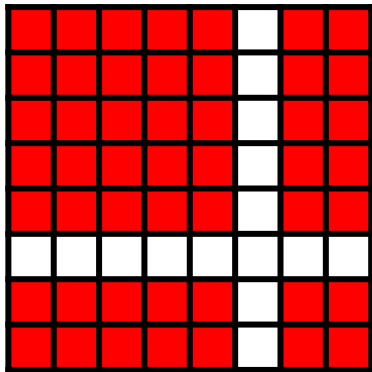
**例** 文字列 B を伝えたい場合



# 1 $N = 1$ の解法：具体例

17 / 105

**例** 文字列 B を伝えたい場合

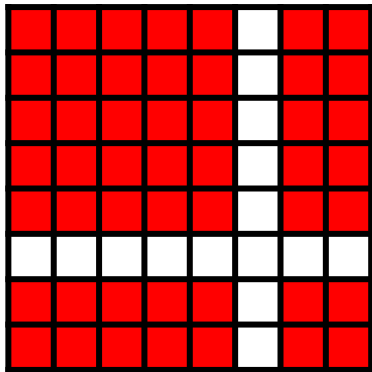


Annaは全部  
赤で塗る

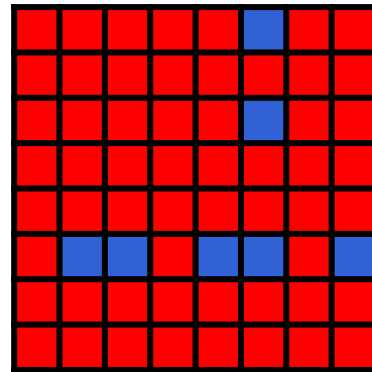
# 1 $N = 1$ の解法 : 具体例

18 / 105

例 文字列 B を伝えたい場合



Annaは全部  
赤で塗る



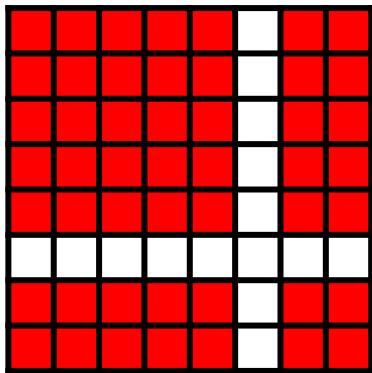
ビ太郎が残りの  
マス塗る

# 1 $N = 1$ の解法：具体例

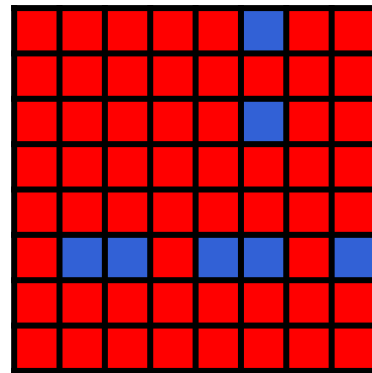
19 / 105

例

文字列 B を伝えたい場合



Annaは全部  
赤で塗る



ビ太郎が残りの  
マスを塗る

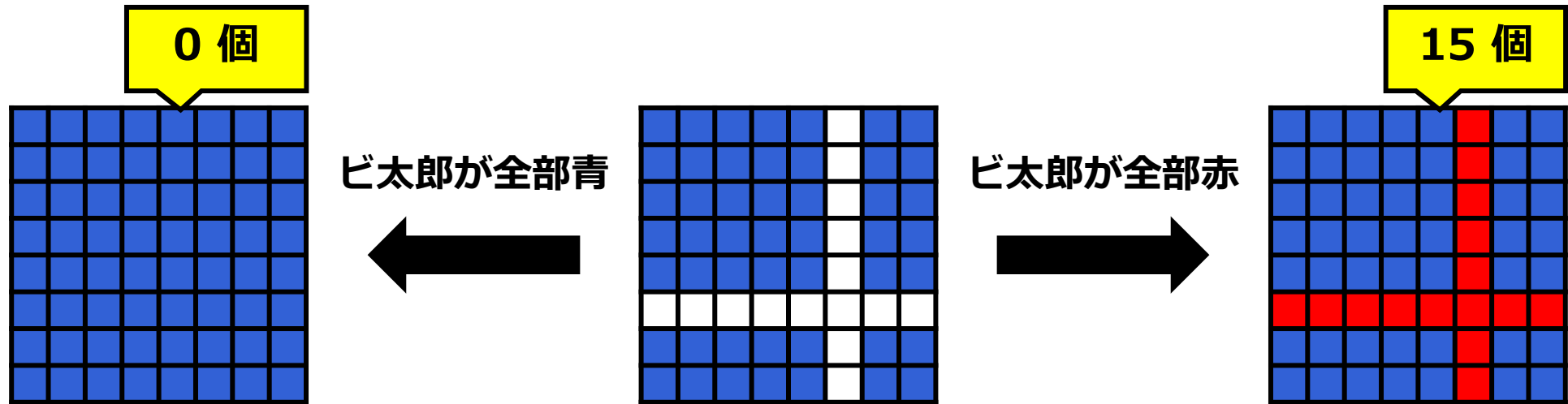


赤の個数 > 32  
Brunoは「B」と判定

# 1 $N = 1$ の解法 : 証明

20 / 105

**なぜこの方法が上手くいくか？**

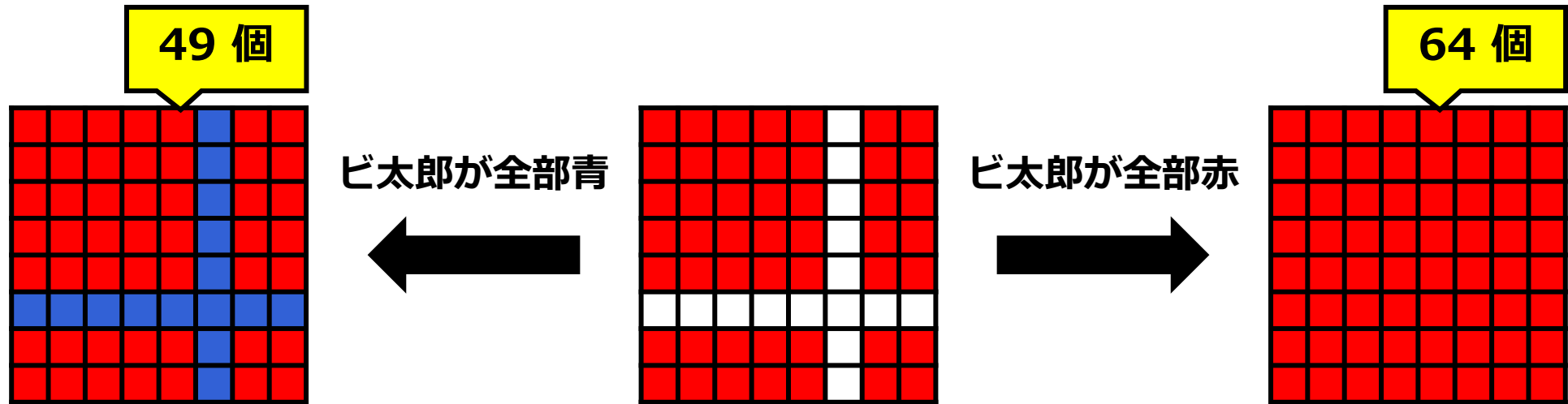


Anna が塗れるマスを全部青で塗った場合

赤の個数は 0~15 個の範囲になる (つまり絶対に 32 個以下)

# 1 $N = 1$ の解法 : 証明

22 / 105



Anna が塗れるマスを全部赤で塗った場合

赤の個数は 49~64 個の範囲になる (つまり絶対に 32 個より多い)

この方法を少し工夫すると  
 $N = 2$  でも解ける

**Anna**

以下の数だけ赤で塗る

- AA : 0個
- AB : 16個
- BA : 32個
- BB : 48個

**Bruno**

赤の個数で場合分け

- 0~15個 : AA
- 16~31個 : AB
- 32~47個 : BA
- 48~63個 : BB

※Anna は、自分が赤で塗るマスの個数を 0~49 個の範囲で調整できる



# 1 $N = 2$ の解法：具体例

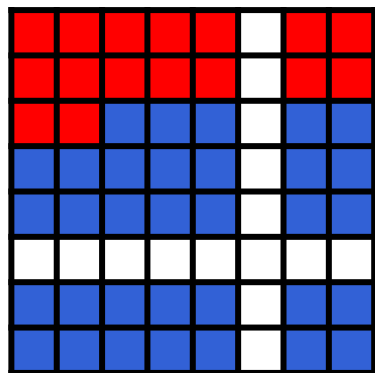
25 / 105

**例** 文字列 AB を伝えたい場合

# 1 $N = 2$ の解法：具体例

26 / 105

**例** 文字列 AB を伝えたい場合

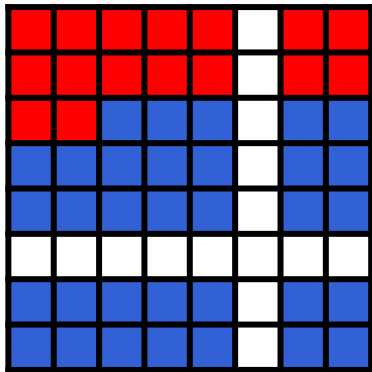


Annaは16マス  
赤で塗る

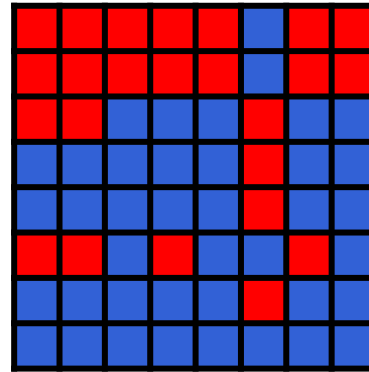
# 1 $N = 2$ の解法 : 具体例

27 / 105

例 文字列 AB を伝えたい場合



Annaは16マス  
赤で塗る



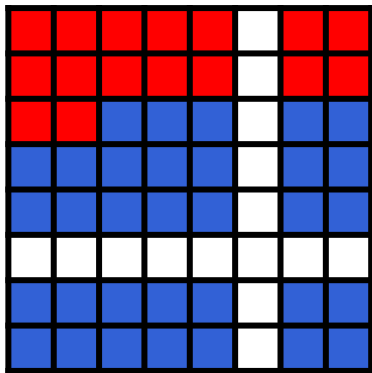
ビ太郎が残りの  
マスを塗る

# 1 $N = 2$ の解法 : 具体例

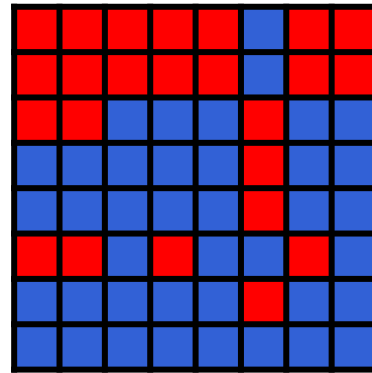
28 / 105

例

文字列 AB を伝えたい場合



Annaは16マス  
赤で塗る



ビ太郎が残りの  
マスを塗る



24個

$16 \leq \text{赤の個数} \leq 31$   
Brunoは「AB」と判定

# 1 $N = 2$ の解法：具体例

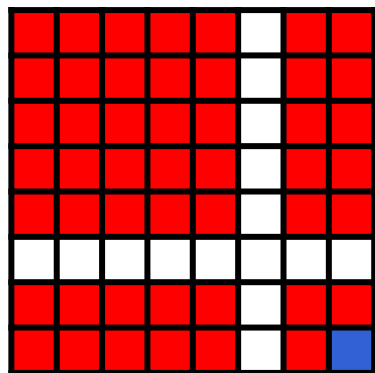
29 / 105

**例** 文字列 BB を伝えたい場合

# 1 $N = 2$ の解法：具体例

30 / 105

**例** 文字列 BB を伝えたい場合

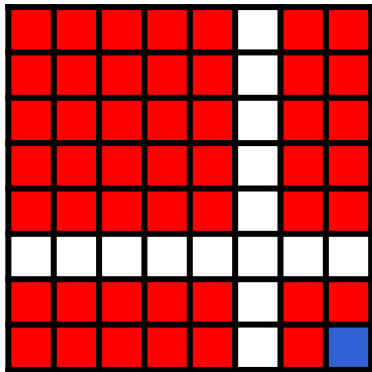


Annaは48マス  
赤で塗る

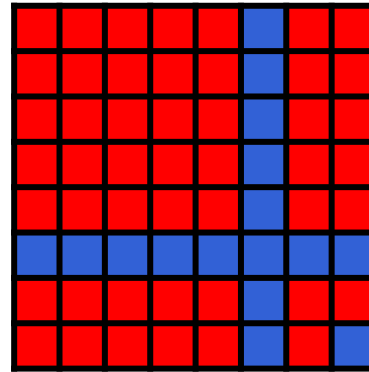
# 1 $N = 2$ の解法 : 具体例

31 / 105

**例** 文字列 BB を伝えたい場合



Annaは48マス  
赤で塗る

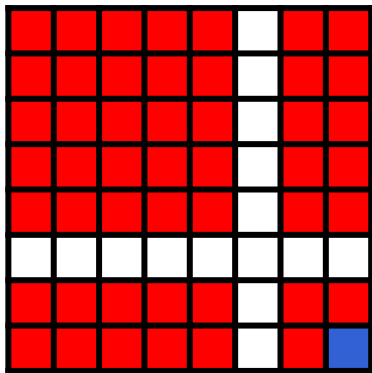


ビ太郎が残りの  
マスを塗る

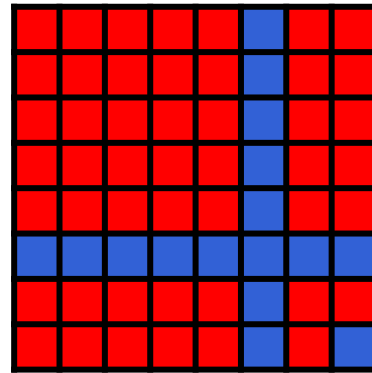
# 1 $N = 2$ の解法 : 具体例

32 / 105

例 文字列 BB を伝えたい場合



Annaは48マス  
赤で塗る



ビ太郎が残りの  
マスを塗る



$48 \leq \text{赤の個数} \leq 63$   
Brunoは「BB」と判定



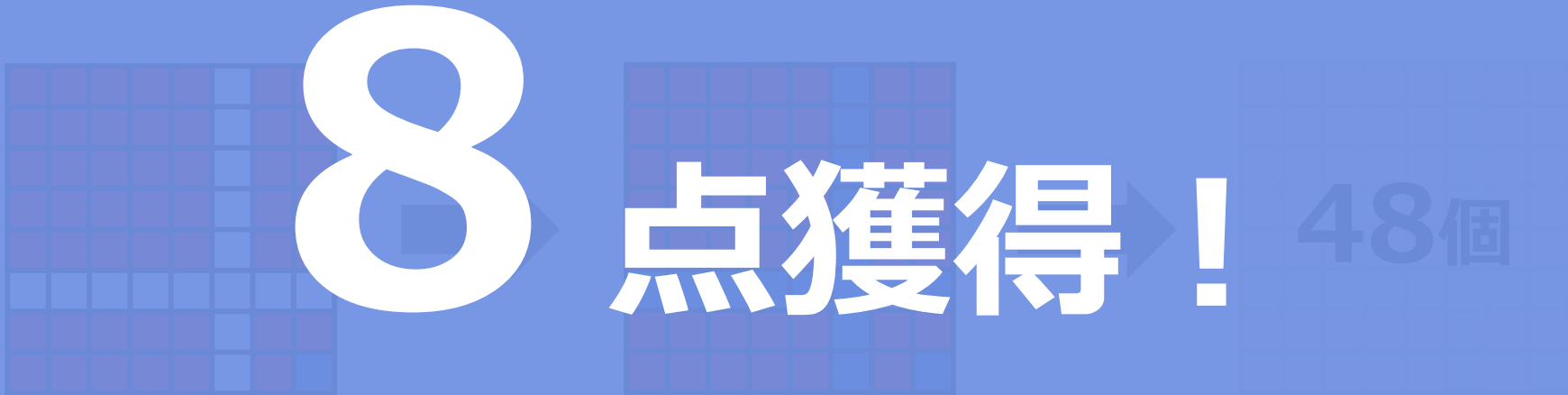
# 1

## $N = 2$ の解法 : 具体例

33 / 105

例

文字列 BB を伝えたい場合



Annaは48マス  
赤で塗る

ビ太郎が残りの  
マスを塗る

$48 \leq \text{赤の個数} \leq 63$   
Brunoは「BB」と判定

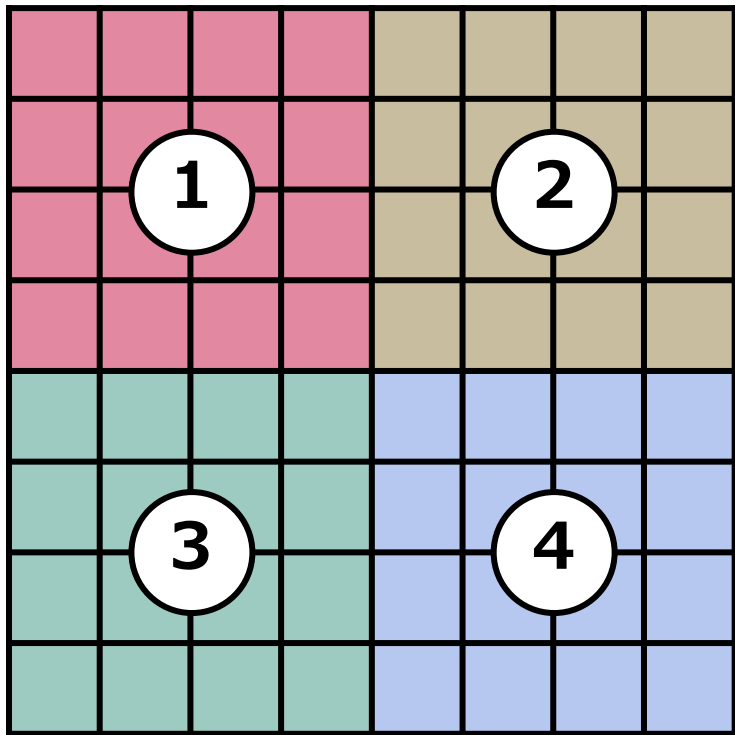
# Stage 2

アイデア：区画ごとに多数決

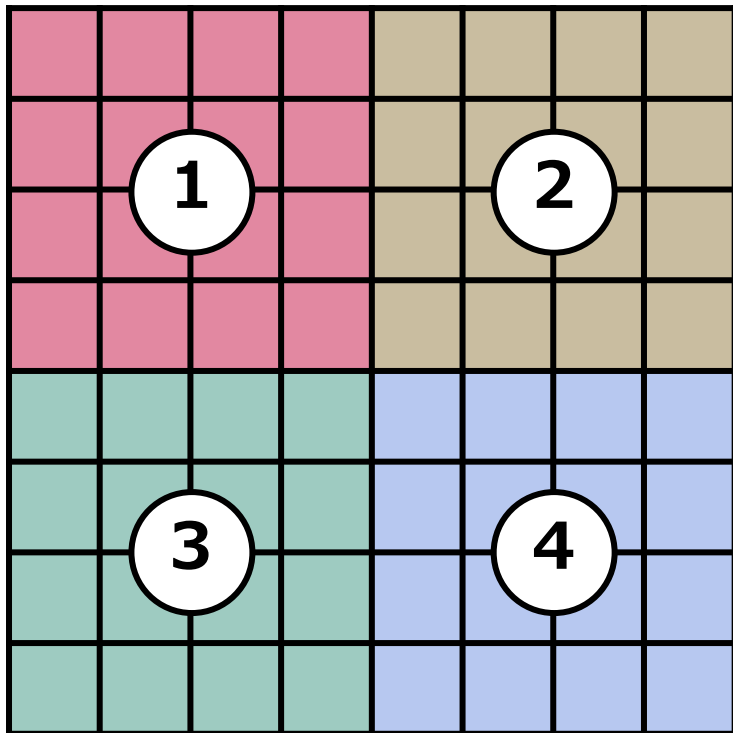
# 2

# $N = 4$ の解法

35 / 105



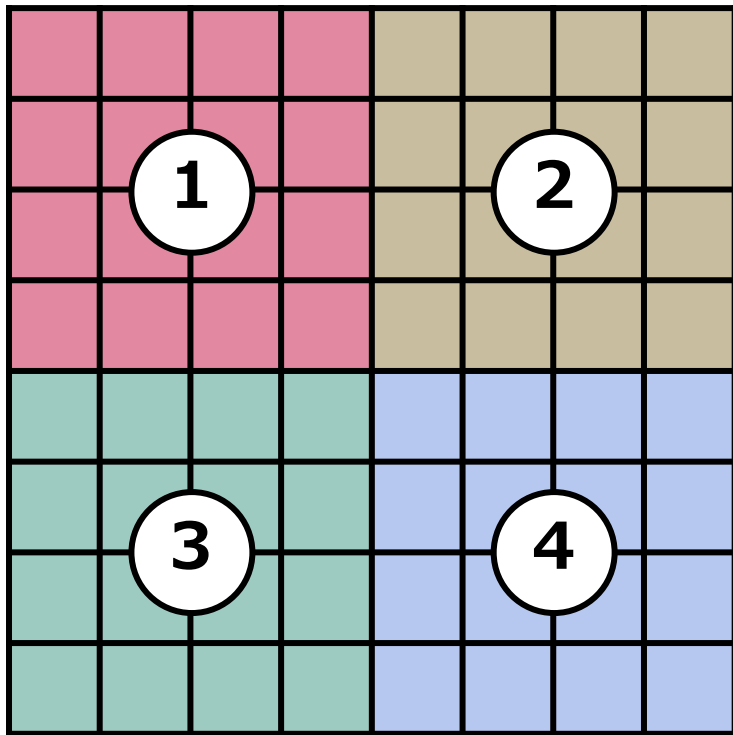
マス目を左図のように 4 分割する



マス目を左図のように 4 分割する



$i$  文字目が A のとき、Anna は区画  $i$  の塗れる  
マスを青で塗る (B のとき赤)



マス目を左図のように 4 分割する



$i$  文字目が A のとき、Anna は区画  $i$  の塗れる  
マスを青で塗る (B のとき赤)



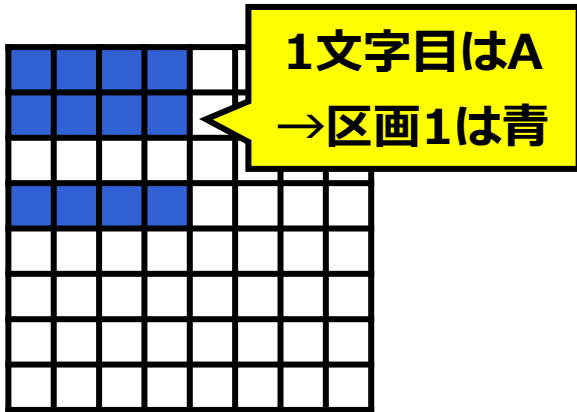
区画  $i$  内で青の方が赤より多い場合、Bruno は  
 $i$  文字目を A だと判断する

**例**

文字列 ABBA を伝えたい場合

例

文字列 ABBA を伝えたい場合



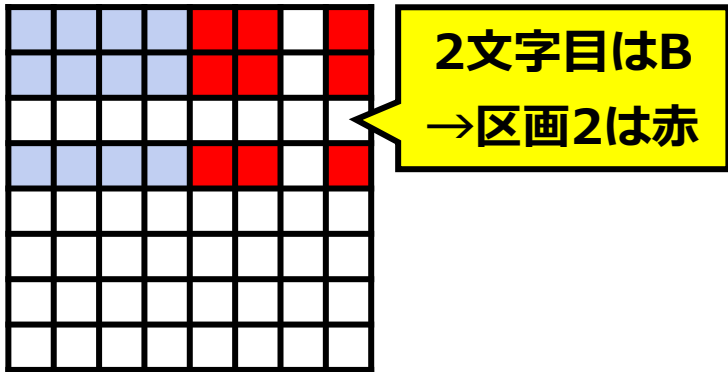
Annaは各区画に  
色を塗る

# 2

## $N = 4$ の解法 : 具体例

例

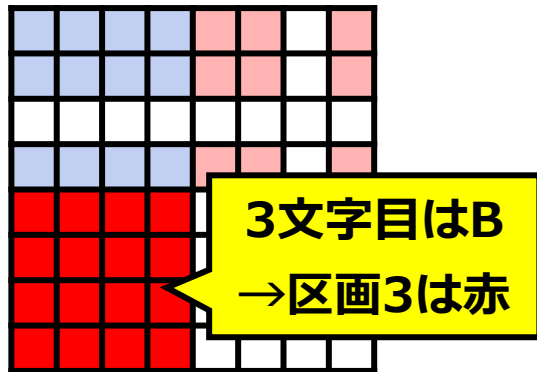
文字列 **ABBA** を伝えたい場合



Annaは各区画に  
色を塗る

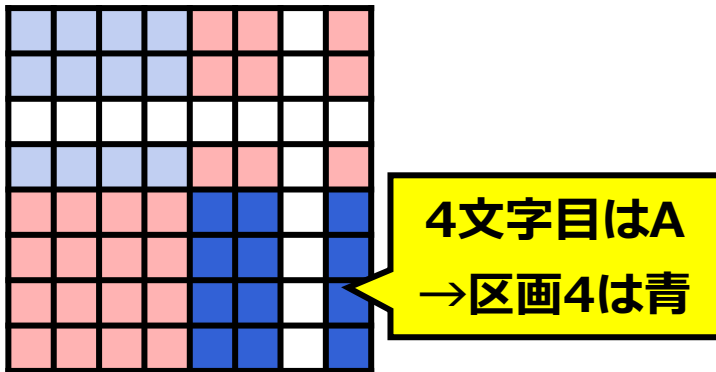


例

文字列 **ABBA** を伝えたい場合

Annaは各区画に  
色を塗る

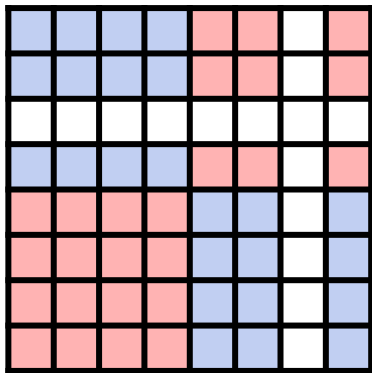
例

文字列 **ABBA** を伝えたい場合

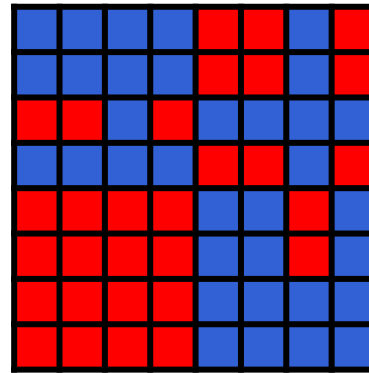
Annaは各区画に  
色を塗る

例

文字列 ABBA を伝えたい場合



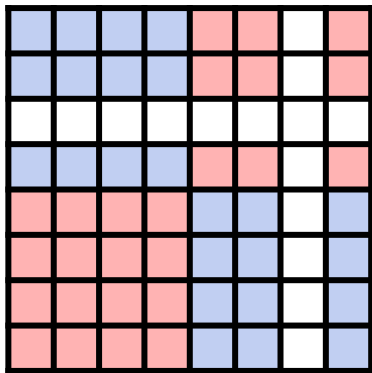
Annaは各区画に  
色を塗る



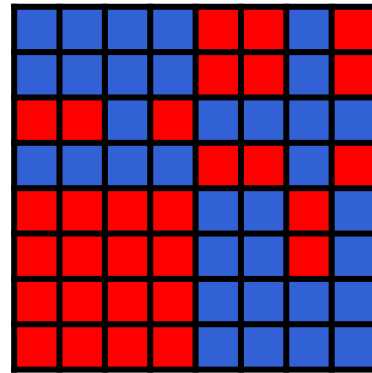
ビ太郎が残りの  
マス塗る

例

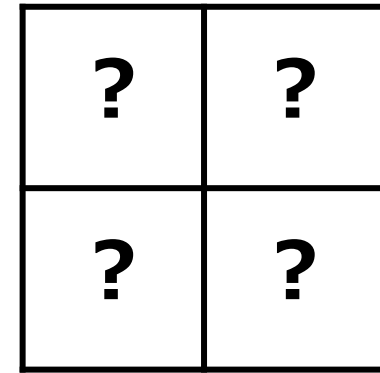
文字列 ABBA を伝えたい場合



Annaは各区画に  
色を塗る



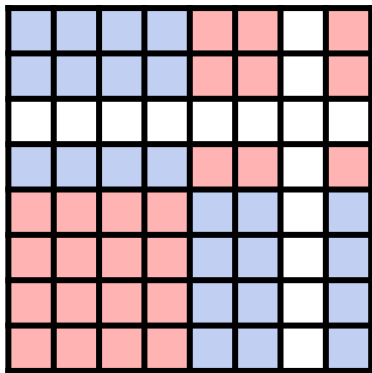
ビ太郎が残りの  
マスを塗る



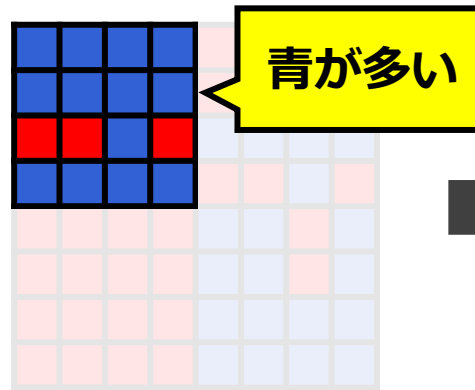
Brunoは区画ごとの  
多数決を取る

例

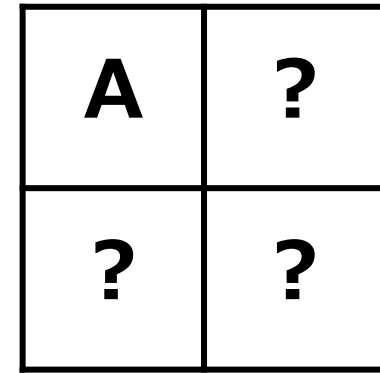
文字列 ABBA を伝えたい場合



Annaは各区画に  
色を塗る



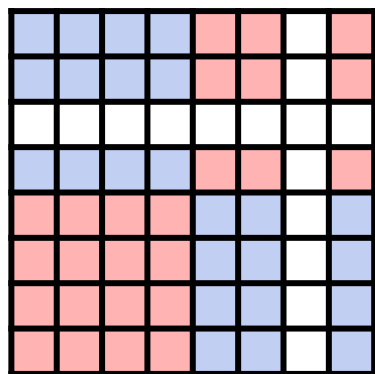
ビ太郎が残りの  
マス塗る



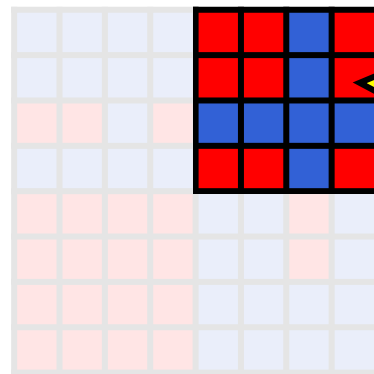
Brunoは区画ごとの  
多数決を取る

例

文字列 ABBA を伝えたい場合



Annaは各区画に  
色を塗る



ビ太郎が残りの  
マス塗る

赤が多い

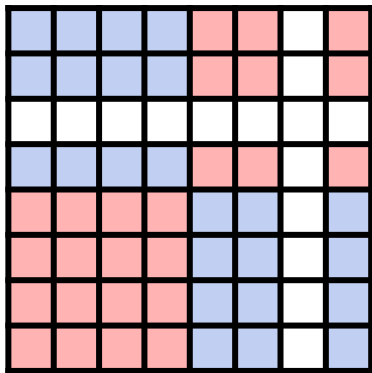


A	B
?	?

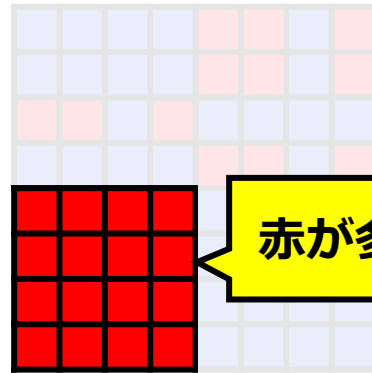
Brunoは区画ごとの  
多数決を取る

例

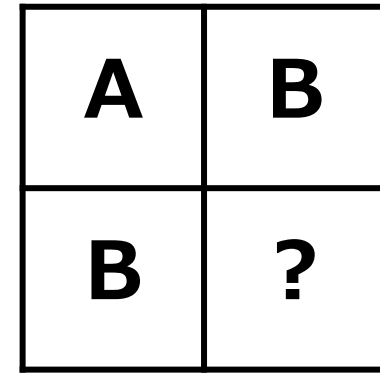
文字列 ABBA を伝えたい場合



Annaは各区画に  
色を塗る



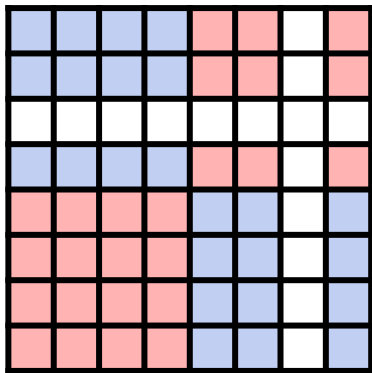
ビ太郎が残りの  
マス塗る



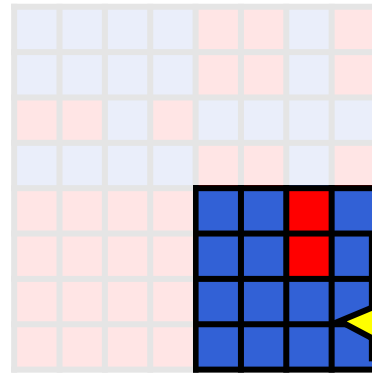
Brunoは区画ごとの  
多数決を取る

例

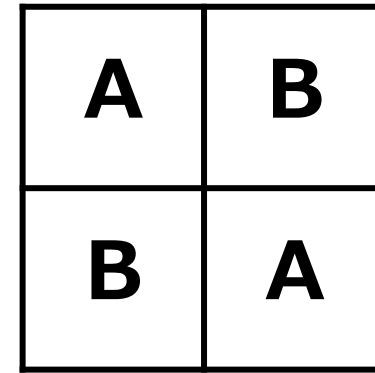
文字列 ABBA を伝えたい場合



Annaは各区画に  
色を塗る



ビ太郎が残りの  
マス塗る



Brunoは区画ごとの  
多数決を取る



例 文字列 ABBA を伝えたい場合

ABBA が当てられた！

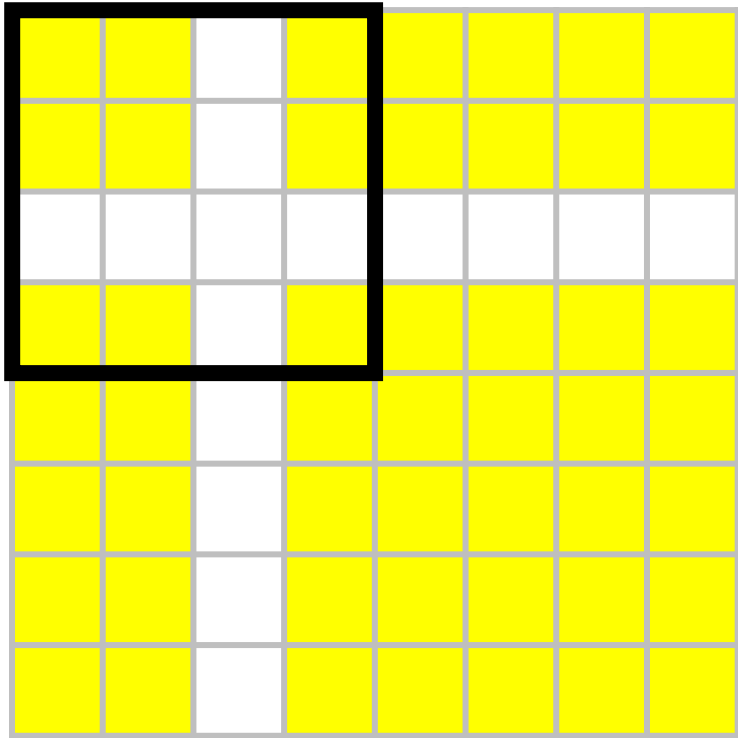
Annaは各区画に  
色を塗る

ビ太郎が残りの  
マスに塗る

Brunoは区画ごとの  
多数決を取る

# 2

# $N = 4$ の解法 : 証明



どんな場合でも、Anna が塗れる黄色マスは  
各区画に (16 個中) 9 個以上存在する



**Anna が過半数をコントロールできる！**

この方法を少し工夫すると  
 $N = 8$  でも解ける

# 2

# $N = 8$ の解法

1	1	1	1	2	2	2	2
1	1	1	1	2	2	2	2
1	1	1	1	2	2	2	2
1	1	1	1	2	2	2	2
3	3	3	3	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4

これまでは、区画が正方形だったが...

## 2

 $N = 8$  の解法

53 / 105

1	8	7	6	5	4	3	2
2	1	8	7	6	5	4	3
3	2	1	8	7	6	5	4
4	3	2	1	8	7	6	5
5	4	3	2	1	8	7	6
6	5	4	3	2	1	8	7
7	6	5	4	3	2	1	8
8	7	6	5	4	3	2	1

これまでは、区画が正方形だったが…  
斜めに分けるとどうなるか？



どの区画も (8 個中) 6 個以上 Anna が塗れる  
過半数獲得！

**この方法をさらに工夫すると  
 $N = 12$  でも解ける**

## 2

 $N = 12$  の解法

55 / 105

1	12	11	9	8	6	5	4
2	1	12	11	9	8	7	5
4	2	1	12	11	10	8	7
5	4	3	1	-	11	10	8
7	6	4	3	1	-	11	10
9	7	6	4	3	2	-	12
10	9	7	6	5	3	2	-
12	10	9	8	6	5	3	2

左図のようになると…

3/5 以上のマスに Anna が塗れるような  
12 個の区画に分割できる！

# 2

# $N = 12$ の解法

56 / 105

1	12	11	9	8	6	5	4
2	1	12	11	9	8	7	5
4	2	1	12	11	8	7	
5	4	3	1	-	10		
7	6	4	3	-	11	10	
9	7	6	4	3	2	-	12
10	9	7	6	5	3	2	-
12	10	9	8	6	5	3	2

# 24 点獲得!

左図のようになると...

3/5 以上のマスに Anna が塗れるような  
12 個の区画に分割できる!



# Stage 3

アイデア :  $X, Y$  を読めるようにする

もし Bruno が  $x, y$  の値を見ることができたら  
Anna が塗った場所もわかる



かなりの文字数を読み取れそう

でも、Bruno は直接  $X, Y$  の値を  
見ることができない

# 3

## $N = 36$ の解法

60 / 105

一体どうすれば、 $X, Y$  の値を  
読み取ることができるのか？

# 3 $N = 36$ の解法 (1/3)

61 / 105

	×						
	×						
×	×	×	×	×	×	×	×
	×						
	×						
	×						
	×						
	×						

全マス置ける

まず、 $4 \times 4$  の区画の中のどれか 1 つは  
全マスに Anna が置くことができる

※Anna が塗れないマスを × 印で示している

# 3 $N = 36$ の解法 (2/3)

62 / 105

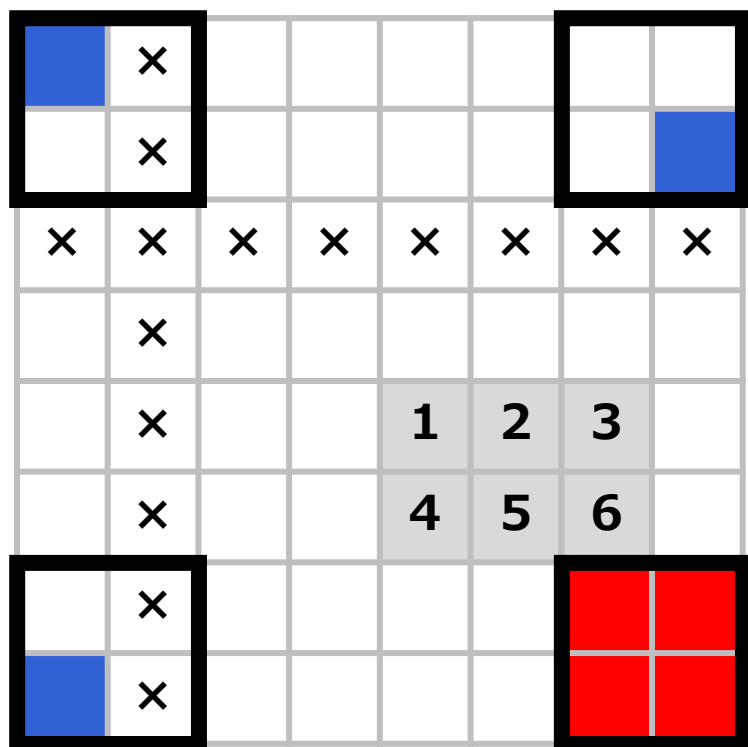
	×						
	×						
×	×	×	×	×	×	×	×
	×						
	×			1	2	3	
	×			4	5	6	
	×						
	×						

そこで、全マス置ける区画の適当な場所に  
 $X, Y$  の情報を記録することを考える  
(64 通りあるので  $\log_2 64 = 6$  マス必要)

※Anna が塗れないマスを × 印で示している

# 3 $N = 36$ の解法 (3/3)

63 / 105



さらに目印として、全マス置ける区画の  $2 \times 2$  隅を赤で塗ることを考える

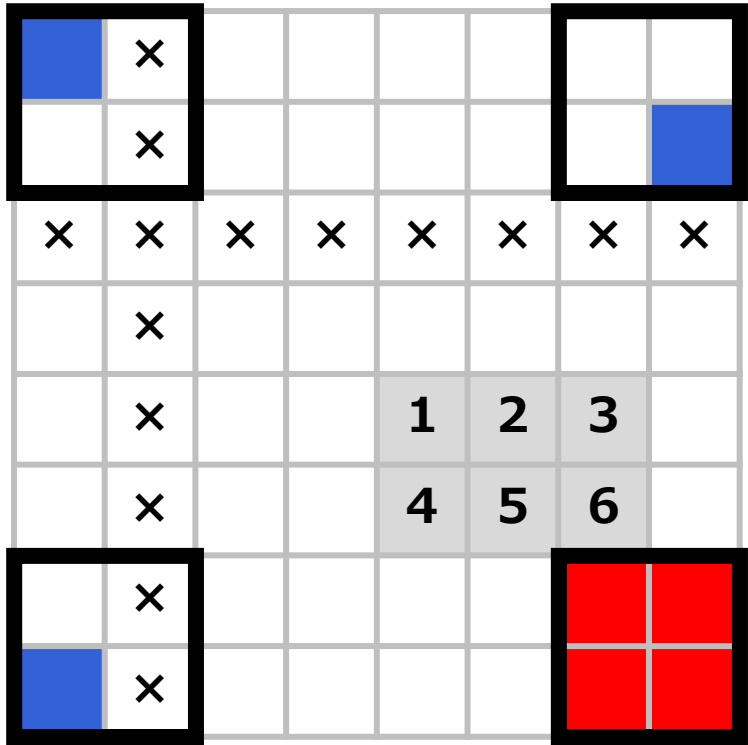
(他の区画の  $2 \times 2$  隅はどれか 1 つを青で塗る)

※Anna が塗れないマスを × 印で示している

このとき、Bruno は  
 $X, Y$  の値を読み取れるのか？



# 3 $N = 36$ の解法



2x2 の隅のうち、全部赤になっているものは必ず 1 つだけ存在する  
(しかもこの周辺に  $x, y$  が書き込まれている)

# 3 $N = 36$ の解法

66 / 105

	x						
x	x	x	x	x	x	x	x
	x						
	x			1	2	3	
	x			4	5	6	
	x						

2×2 の隅のうち、全部赤になっているものは必ず 1 つだけ存在する

(しかもこの周辺に  $x, y$  が書き込まれている)



**Bruno は隅を見れば良い!**

**$X, Y$  を読み取った後は？**

# 3

# $N = 36$ の解法

68 / 105

Blue	×	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow
Yellow	×	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Blue
×	×	×	×	×	×	×	×
Yellow	×	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow
Yellow	×	Yellow	Yellow	Gray	Gray	Gray	Yellow
Yellow	×	Yellow	Yellow	Gray	Gray	Gray	Yellow
Yellow	×	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Red	Red
Blue	×	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Red	Red

Anna が塗れるマスの中で  
現時点で使われていないものは 36 個

	×	1	2	3	4	5	6
7	×	8	9	10	11	12	
×	×	×	×	×	×	×	×
13	×	14	15	16	17	18	19
20	×	21	22				23
24	×	25	26				27
28	×	29	30	31	32		
	×	33	34	35	36		

Anna が塗れるマスの中で  
現時点で使われていないものは 36 個



左上から順に 1, 2, ..., 36 文字目を記録すれば、 $N = 36$  で解ける

## 具体例を考えてみよう

例 : AAAAAAAAAAAAAAAAAAABBBBBBBBBBBBBBBBBBBB を伝えたい

(ただし  $X = 4, Y = 7$ )

# 3 $N = 36$ の解法 : 具体例 (Anna)

71 / 105

							×
							×
							×
							×
×	×	×	×	×	×	×	×
							×
							×
							×

まず、左上の  $4 \times 4$  隅が完全に空いている

# 3 $N = 36$ の解法 : 具体例 (Anna)

72 / 105

							×
							×
	X	X	X				×
	Y	Y	Y				×
×	×	×	×	×	×	×	×
							×
							×
							×

まず、左上の  $4 \times 4$  隅が完全に空いている



この中の適切な場所に  
 $X=4$  (赤青青)、 $Y=7$  (赤赤赤) を記録

※赤青青は 2 進法の 100 [=4]、赤赤赤は 2 進法の 111 [=7] に対応。



# 3 $N = 36$ の解法 : 具体例 (Anna)

73 / 105

★	★					★	×
★	★						×
							×
							×
×	×	×	×	×	×	×	×
							×
							×
★						★	×

まず、左上の  $4 \times 4$  隅が完全に空いている



この中の適切な場所に  
 $X=4$  (赤青青)、 $Y=7$  (赤赤赤) を記録

次に、左上の  $2 \times 2$  隅を全部赤で塗り

それ以外の隅を 1 マス青で塗る

# 3 $N = 36$ の解法 : 具体例 (Anna)

74 / 105

		1	2	3	4		×
		5	6	7	8	9	×
10				11	12	13	×
14				15	16	17	×
×	×	×	×	×	×	×	×
18	19	20	21	22	23	24	×
25	26	27	28	29	30	31	×
	32	33	34	35	36		×

その後、残った塗れるマスに  
左上から順に「文字に対応する色」で塗る  
(A は青、B は赤)

※AA…ABB…B なので、18 文字目までが青、19 文字目からが赤

# 3 $N = 36$ の解法 : 具体例 (Anna)

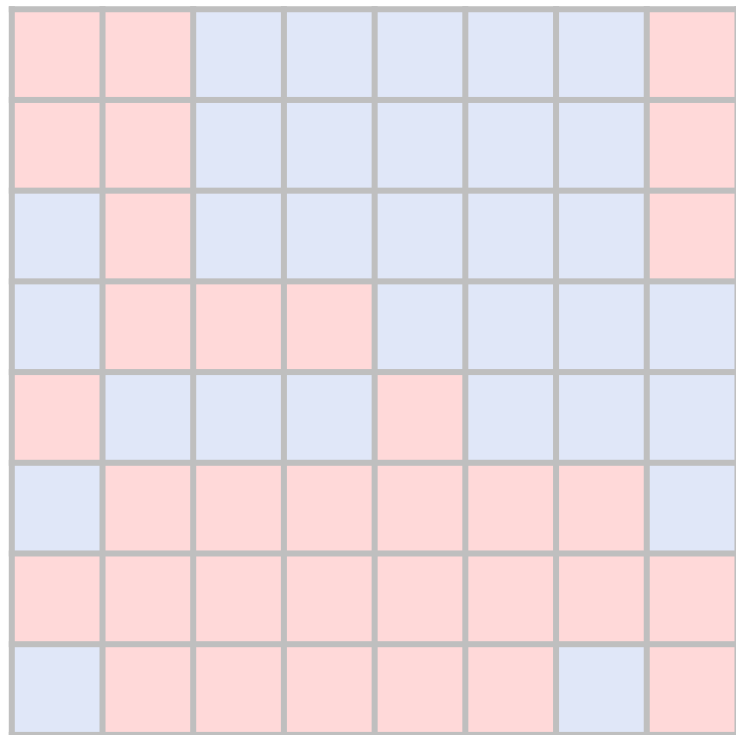
75 / 105

							×
							×
							×
							×
×	×	×	×	×	×	×	×
							×
							×
							×

**このとき、Bruno は文字列を  
復元できるか？**

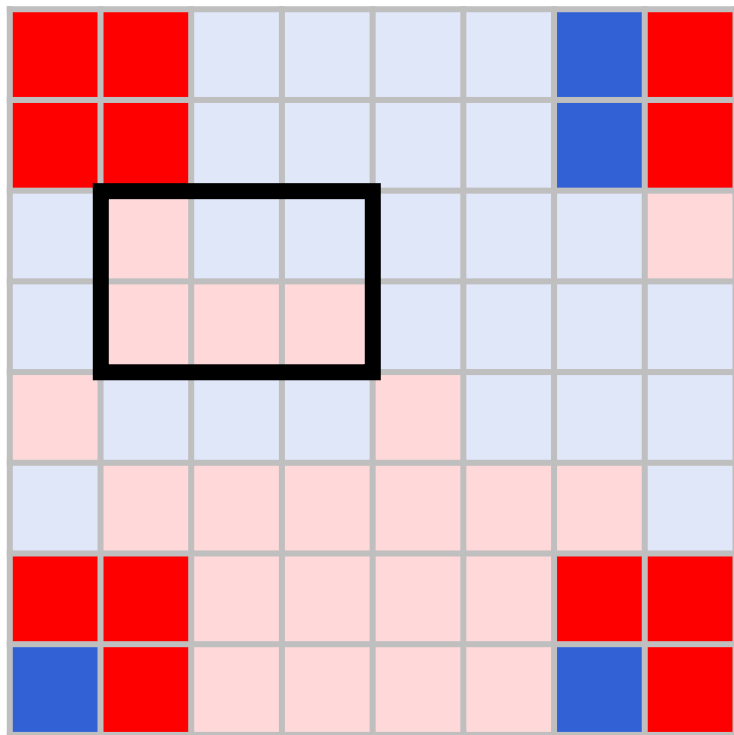
# 3 $N = 36$ の解法 : 具体例 (Bruno)

77 / 105



# 3 $N = 36$ の解法 : 具体例 (Bruno)

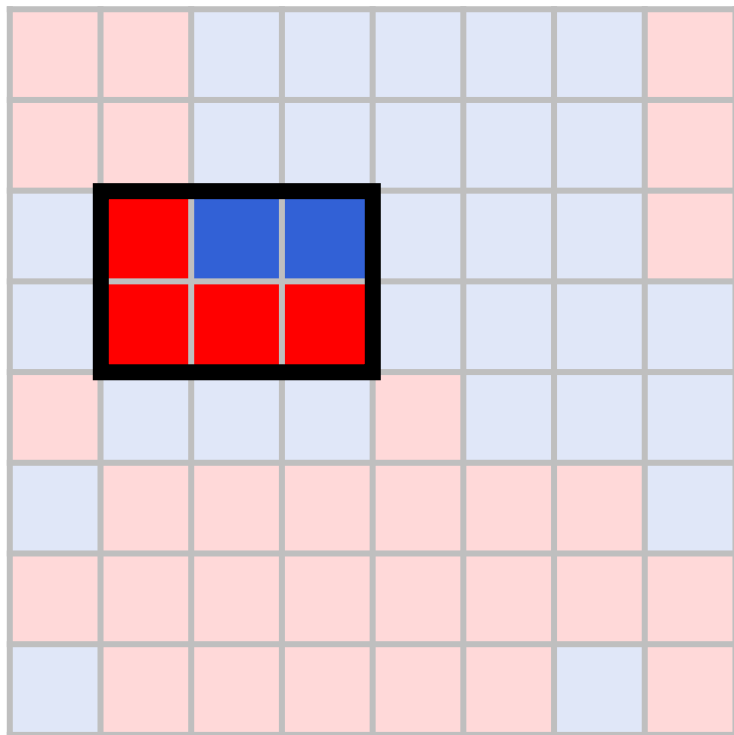
78 / 105



まず、 $2 \times 2$  の隅の中で全部赤のものは左上だけ  
→太枠の中に  $X, Y$  の情報が書かれている

# 3 $N = 36$ の解法 : 具体例 (Bruno)

79 / 105

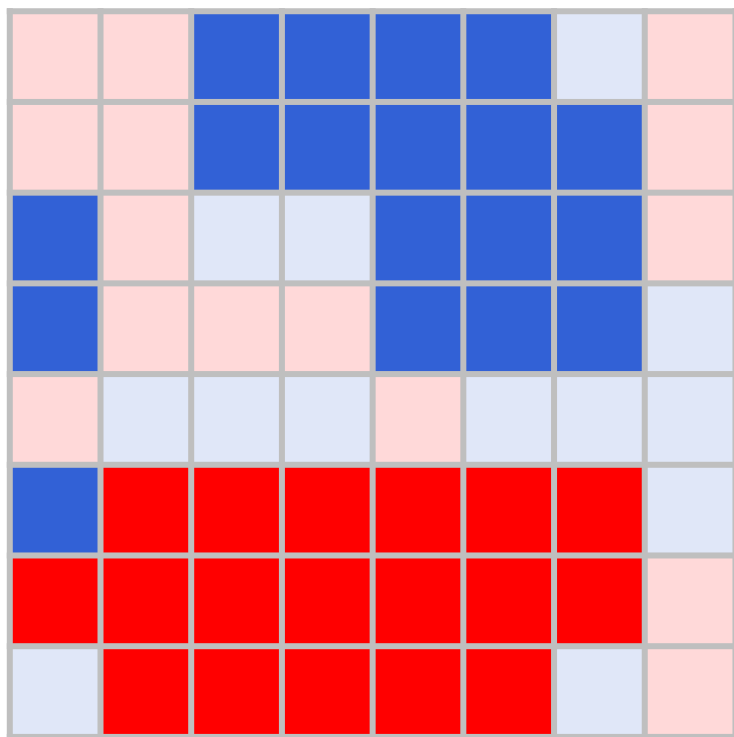


まず、 $2 \times 2$  の隅の中で全部赤のものは左上だけ  
→太枠の中に  $X, Y$  の情報が書かれている

情報を読むと、 $(X, Y) = (4, 7)$

# 3 $N = 36$ の解法 : 具体例 (Bruno)

80 / 105



まず、 $2 \times 2$  の隅の中で全部赤のものは左上だけ  
→太枠の中に  $X, Y$  の情報が書かれている

情報を読むと、 $(X, Y) = (4, 7)$

そして  $(X, Y)$  が決まれば、文字列の情報がどこに  
書かれているかがわかる

→答え「AAAA...ABBBB...B」が復元できる



# 3 $N = 36$ の解法：具体例 (Bruno)

81 / 105

36 文字を正しく

答えることができた！

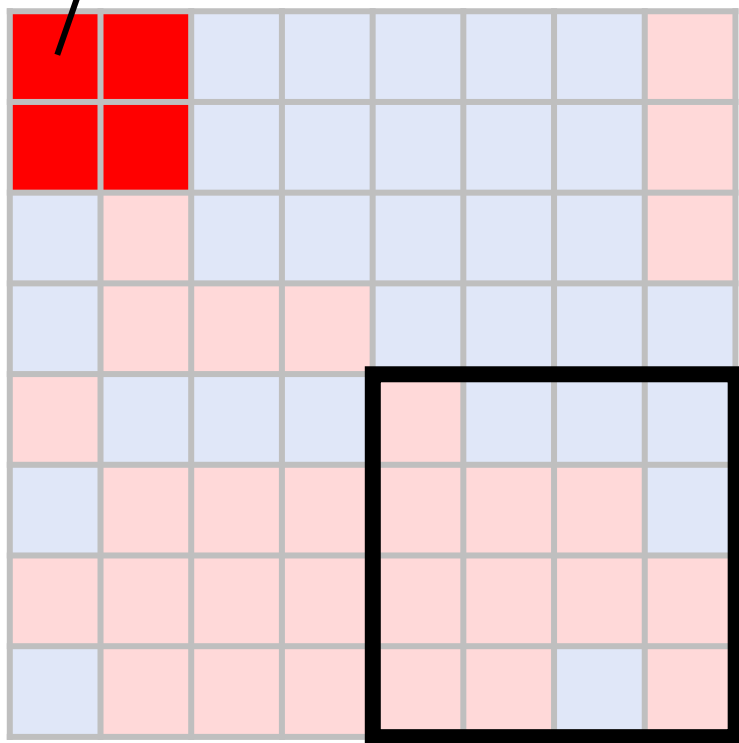
まず、 $2 \times 2$  の隅の中で全部赤のものは左上だけ  
→大枠の中に「A」の情報が書かれている

そして「B」が何回あるかは「文字列」の情報がどこに  
書かれているかがわかる

→答え「AAAA...BBBBB...B」が復元できる

**この方法を少し工夫すると  
 $N = 38$  でも解ける**

2×2 隅



元々は、 $(X, Y)$  を記録するのに 6 マス使ったが...

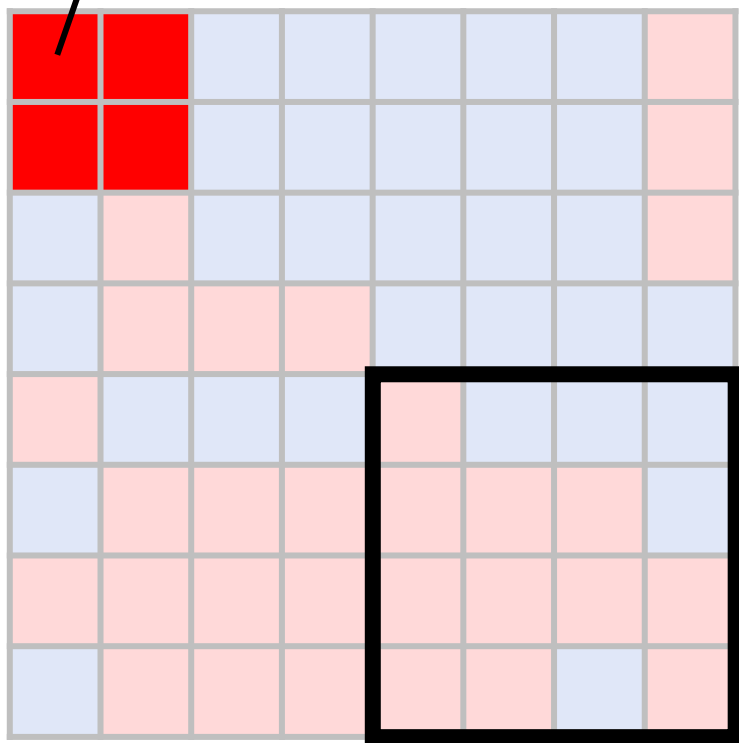
2×2 隅が全部赤になっている部分がわかれば

$(X, Y)$  は太枠の 16 通りに絞れる

# 3 $N = 38$ の解法

84 / 105

2×2 隅



元々は、 $(X, Y)$  を記録するのに 6 マス使ったが…

2×2 隅が全部赤になっている部分がわかれば  
 $(X, Y)$  は太枠の 16 通りに絞れる



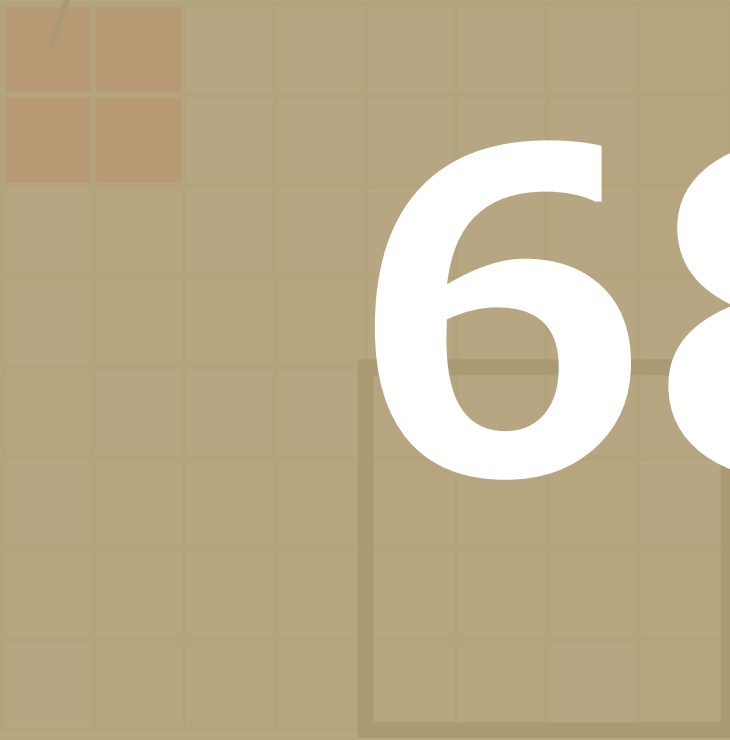
$(X, Y)$  の記録が 4 マスで済み  
2 文字分多く記録できる！

# 3

## $N = 38$ の解法

85 / 105

2×2 隅



# 68

## 点獲得!

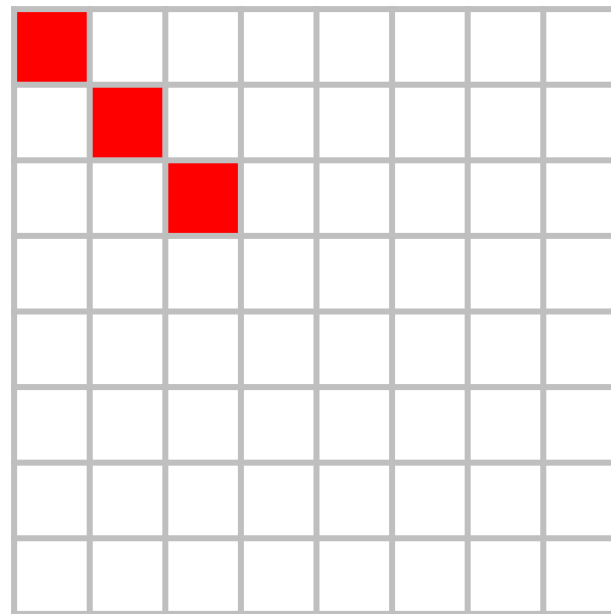
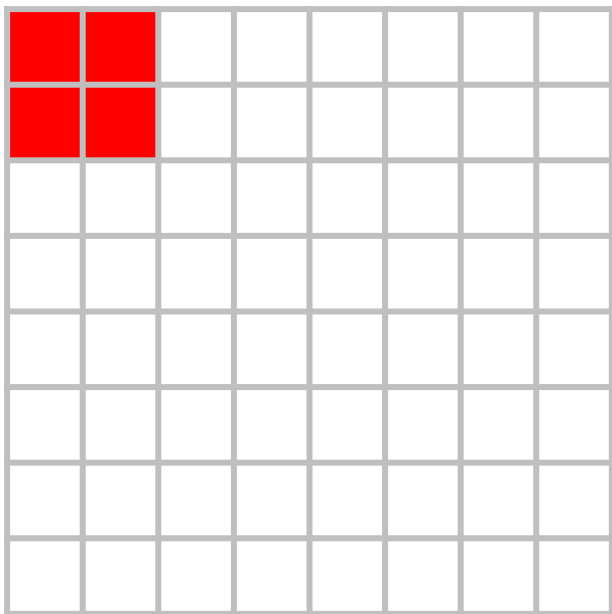
元々は、 $(X, Y)$  を記録するのに 6 マス使ったが...

2×2 隅が全部赤になっている部分がわかれば

$(X, Y)$  は太枠の 16 通りに絞れる

$(X, Y)$  の記録が 4 マスで済み

2 文字分多く記録できる!



実は、識別は  $2 \times 2$  隅ではなく斜め 3 つでも出来る

→ 1 マス減るので  $N = 39$  が解ける (71 点)

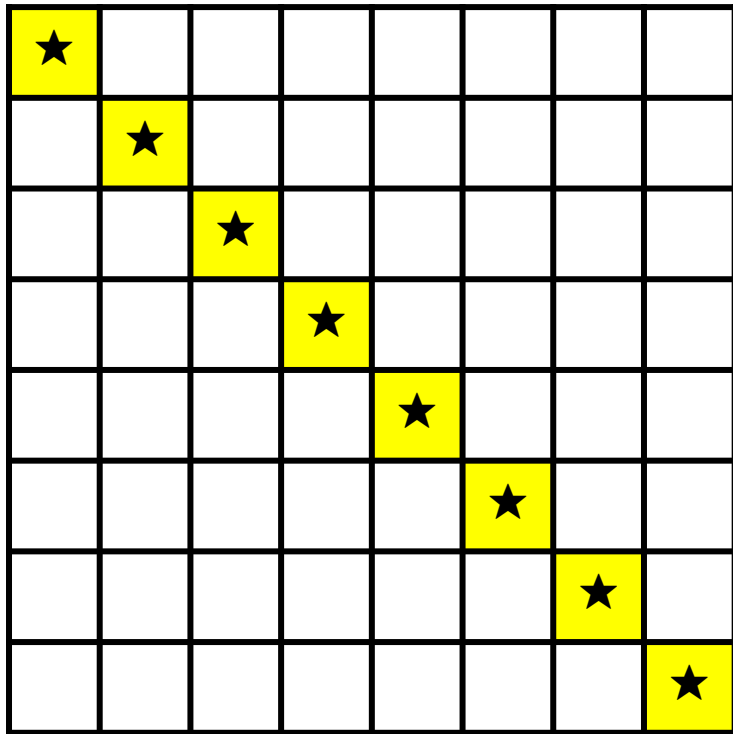
# Stage 4

**アイデア：対角線を活用する**

# 4

# $N = 42$ の解法

88 / 105



対角線の 8 マスだけで

$(X, Y)$  の情報を読み取ることができる



×	×	×	×	×	×	×	×
×	★						
×		★					
×			★				
×				★			
×					★		
×						★	
×							★

42 マス使える

対角線の 8 マスだけで

 $(X, Y)$  の情報を読み取ることを考える

もしこれが可能であれば...

- $X = Y$  のとき 42 文字分記録できる
- $X \neq Y$  のとき 43 文字分記録できる

★	×						
	×						
	×	★					
	×		★				
	×			★			
×	×	×	×	×	×	×	×
	×					★	
	×						★

43 マス使える

対角線の 8 マスだけで

$(X, Y)$  の情報を読み取ることを考える

もしこれが可能であれば...

- $X = Y$  のとき 42 文字分記録できる
- $X \neq Y$  のとき 43 文字分記録できる

つまり、対角線だけで  $(X, Y)$  を読めれば  $N = 42$  で解ける

**でも、本当にできるのか？**

## 4

 $N = 42$  の解法

92 / 105

×							
×	×	×	×	×	×	×	×
×		★					
×			★				
×				★			
×					★		
×						★	
×							★

$X \neq Y$  の場合、★の部分は決められるが

対角線の 2 マスはビ太郎が塗る

→対角線の色の並びとしては  $2^2=4$  通りがあり得る

×							
×	×	×	×	×	×	×	×
×		赤					
×			赤				
×				青			
×					青		
×						赤	
×							青

$X \neq Y$  の場合、★の部分は決められるが  
対角線のうち 2 マスはビ太郎が塗る

→対角線の色の並びとしては  $2^2=4$  通りがあり得る

例：★印を「赤赤青青赤青」にする場合…

赤赤赤赤青青赤青、赤青赤赤青青赤青、

青赤赤赤青青赤青、青青赤赤青青赤青の 4 つ

★			×				
	★		×				
		★	×				
×	×	×	×	×	×	×	×
			×	★			
			×		★		
			×			★	
			×				★

$X = Y$  の場合、★の部分は決められるが

対角線のうち 1 マスはビ太郎が塗る

→対角線の色の並びとしては  $2^1=2$  通りがあり得る

つまり、対角線の色の並びとしては (重複含め)

- $X \neq Y$  の場合 :  $56 \times 4 = 224$  通り
- $X = Y$  の場合 :  $8 \times 2 = 16$  通り

**240 通り**が存在する！

そして、この並びは全部異ならなければならない※  
つまり  $2^8=256$  通りの中に 240 通りを埋め込む必要がある

**こんなこと出来るのか？**

※もし対角線の色の並びに同じものがあった場合、 $(X, Y)$  を正しく読み取ることができない



# 4

## $N = 42$ の解法

97 / 105

そして、この並びは全部異ならなければならない\*

つまり  $2^8=256$  通りの中に 240 通りを埋め込む必要がある

**焼きなまし法を使えば、構成できる**

こんなこと出来るのか？

\*もし対角線の色並びに同じものがあつた場合、 $(X, Y)$  を正しく読み取ることができない

## 4

 $N = 43$  の解法

98 / 105

×	×	×	×	×	×	×	×
×	★						
×		★					
×			★				
×				★			
×					★		
×						★	
×							★

42 マス使える

$X = Y$  の場合、対角線以外で  
Anna が書けるマスが 42 個しかない

このままでは 42 文字しか記録できないので  
対角線に  $X, Y$  だけでなく「最後の 1 文字」も  
記録することを考える

すると、対角線の色の並びの数は…

- $X \neq Y$  の場合 :  $56 \times 4 = 224$  通り
- $X = Y$  の場合 :  $8 \times 2 \times 2 = 32$  通り

の合計 **256 通り**になる！

そこで、 $2^8=256$  通りの中に 256 通りを埋め込むことは可能か？

一見厳しそうに思えるが...

# 4

## $N = 43$ の解法

101 / 105

焼きなまし法を高速化すれば

構成できる！

※解説担当者の方針では、1億～10億回程度のループが必要になるので数分以内に実行を終わらせるには、スコア計算を  $O(1)$  時間で終わらせる必要がある

4

$N = 43$  の解法

102 / 105

100 点獲得!

そこで、256通りの中から256通りを埋め込むことは可能か？

見取しをうつつに忘れるが...

# 解法のまとめ

Stage 1

赤の個数で文字列を識別

Stage 2

区画ごとに分けて多数決をとる

Stage 3

Bruno が  $x, y$  の値を読み取れるようにする

Stage 4

対角線に  $x, y$  を記録 + 焼きなまし法で埋め込み法を構成



# 5

# 得点分布

105 / 105

平均点 **29.5**

