Tricolor Lights 解説

ynymxiaolongbao

問題概要

- AnnaとBrunoの二人が協力して、ディ太郎に勝ちたい
- 長さNのボードがあり、Annaは各場所をR, G, B のいずれかの色で塗る
- 各場所には一色だけ禁止色 S_iがあり、その色では塗れない

RGGBRBBG

問題概要

- Annaが整数Lを指定する
- ディ太郎がボードの長さLの区間を切り取り、そこの色の並びをBrunoに伝える
- Brunoはディ太郎が切り取った場所がどこかを答える

RGGBRBBG　→答え3

長さ5

問題概要

- Lは大きくした方が簡単、Nは小さい方が簡単
- 小課題４まで：Lの上限は130固定で、Nが段々大きくなる
- 小課題５：Nが大きい値で固定で、Lの上限が段々小さくなる

RGGBRBBG →答え3

長さ5

小課題１（$N \leq 131 = L + 1$）

- $N \leq 130$のとき、$L = N$に設定すれば答えはいつも1
- $N = 131$のとき、$L = 130$にすると、1~130なのか2~131なのか判定できれば良い
- 思ったより難しい

小課題１（$N \leq 131 = L + 1$）

- 気持ち：一つの桁ではちゃんと情報を伝えられない
- たとえば、「この桁がRだったらこういう意味」と決めておいたとしても、その桁をRにすることが禁止されてると、そうできない
- →二つの桁を使って情報を伝える

小課題１　$(N \leq 131 = L + 1)$

- 二つの桁を使って情報を伝える
- 二つの桁が等しいか／異なるか　を自由に決められる

R, G

禁止色

B, B　等しい色にする場合

G, R　異なる色にする場合

小課題１ （$N \leq 131 = L + 1$）

- 等しくする場合：禁止されている色はR,G,Bのうち高々二種類→残りの色を選んで両方それで塗る
- 異なるようにする場合：塗り方は$2 \times 2 = 4$通りあるが、等しい色にする方法は3通りしかないので、少なくとも1通りでは異なる色になる（鳩ノ巣原理）

R, G

禁止色

B, B　等しい色にする場合

G, R　異なる色にする場合

小課題１（$N \leq 131 = L + 1$）

- Anna（色を塗る人）は、1桁目と130桁目を同じ色に塗って、2桁目と131桁目を異なる色に塗る
- Bruno（場所を当てる人）は、受け取った色の並びの左端と右端が同じ色かを見て、同じなら1、異なるなら2と答えれば良い

小課題２（$N \leq 250 \sim 2L$）

- 隣り合う二つが等しいか異なるかに注目
- 値が同じことを0、異なることをXと書く
- Anna（色を塗る人）：隣あう二つの違いが図のようになるようにする

$$\underbrace{X \cdots\cdots X}_{128}\ 0\ \underbrace{X \cdots\cdots X}_{128}$$

小課題２（$N \leq 250 \sim 2L$）

- まず0になる（色が等しい）二か所の色を決める
- Xになる（色が異なる）場所は、0に近い方から順に、三色のうち隣の色・禁止色のどちらでもない色を選んで行く

$$\underbrace{X \cdots\cdots X}_{128}\ 0\ \underbrace{X \cdots\cdots X}_{128}$$

小課題２（$N \leq 250 \sim 2L$）

- Bruno（場所を当てる人）：場所が1,2,⋯,129のとき、0がある位置は129,128,⋯,1 になっているので、130-「0がある位置」で場所が分かる

$$\underbrace{X\cdots\cdots X}_{128}\ 0\ \underbrace{X\cdots\cdots X}_{128}$$

小課題３（$N \leq 380 \sim 3L$）

- Anna：隣あう二つの違いが図のように並ぶようにする
- ?はAnna制御できずよく分からなくなった値とする
- ?は0かXのどちらかとしてBrunoに伝えられる

$$\underbrace{X\cdots\cdots X}_{126}\;?\;0\;\underbrace{X\cdots\cdots X}_{122}\;?\;0\;X\;?\;0\;\underbrace{X\cdots\cdots X}_{125}$$

小課題３ （$N \leq 380 \sim 3L$）

- Bruno：0が二回以上出てくるので、その距離を見てどこの0か判定
- 値が0のとき、Annaが0と?のどちらで送ったか分からない
- 本当の0の次は必ずXで、?の次は必ず0なので、分かる

$$\underbrace{X\cdots\cdots X}_{126}\ ?\ 0\ \underbrace{X\cdots\cdots X}_{122}\ ?\ 0\ X\ ?\ 0\ \underbrace{X\cdots\cdots X}_{125}$$

小課題 4 （$N \le 7000 \sim L^2/2$）

- 0の間の距離がL-7, 3, L-8, 4, L-9,…,L/2 になるようにする
- どの長さLの区間にも0が2つ以上出てくるので、その距離を見るとどこの0か分かる

$$\cdots\underbrace{X\cdots\cdots X}_{20}\ ?\ 0\ \underbrace{X\cdots\cdots X}_{101}\ ?\ 0\ \underbrace{X\cdots X}_{21}\ ?\ 0\ \underbrace{X\cdots\cdots X}_{100}\cdots$$

小課題５（$N \leq 5 \times 10^5, L = 28\sim130$）

- $L = log\ N \times$ 定数　くらいにしないといけない
- 2進数とか3進数を使う

- 大ブロックに分ける解法

L = 130 -> 60 -> 40 -> 33 -> 31 / 32（天才）

- 小ブロックに分ける解法（de Bruijn 列）

L = 51(乱択）-> 34 -> 31 -> 29 -> 28

大ブロックに分ける解法

L = 130 -> 60 -> 40 -> 33 -> 31 / 32(天才)

$L = 130$ （40点）

- * を、Annaが自由に決めた0かXの値とする
- 図の長さ59のブロックを繰り返す
- * * …* の部分でブロックの番号を2進数14桁で書く

$$\underbrace{?\ *\cdots\cdots\ ?\ *}_{14\times 2}\ ?\ 0\ \underbrace{X\cdots\cdots\cdots X}_{29}$$

$L = 130$ （40点）

- 0の後にXが29個並ぶのはブロックの右端の部分だけ

→どこからブロックが始まるか分かる

→そこに書いてある２進数を見て、そのブロックの番号を求める

→どこを切り出したのか分かる

$$\underbrace{?\ *\cdots\cdots\ ?\ *}_{14\times 2}\ ?\ 0\ \underbrace{X\cdots\cdots\cdots X}_{29}$$

$L = 60$ （50点）

- ブロックが完全に含まれている必要はない
- 困るのは、ブロックが途中で切れて、図のようになるとき
- 二進数が完全には読めない

？＊… ？＊？0 X………X？＊… ？＊

$L = 60$ （50点）

- ブロックの番号xの下のk桁と$x+1$の上$14-k$桁が分かる
- xの下k桁が1…1なら、xの上14−k桁は、$x+1$の上$14-k$桁 -1
- そうでない場合、 xの上14−k桁は$x+1$の上$14-k$桁と同じ

→ブロックの番号が分かる

？＊… ？＊？0 X………X？＊… ？＊

$L = 40$ （58点）

- 2進数ではなく 3 進数が使える
- R, G, Bを0, 1, 2とみなして、その差（mod 3）を自由に決められる

$$\underbrace{?\ *\cdots\cdots?\ *}_{9\times 2}\ ?\ 0\ \underbrace{X\cdots\cdots\cdots X}_{19}$$

$L = 40$ （58点）

- ＊ を0,1,2のAnnaが自由に決められる値とする
- 図の長さ39のブロックを繰り返す
- ＊＊…＊ の部分でブロックの番号を3進数9桁で書く

$$\underbrace{?\,*\cdots\cdots?\,*}_{9\times 2}\;?\;0\;\underbrace{X\cdots\cdots\cdots X}_{19}$$

$L = 33$ （80点）

- 前の解法は、右端以外の所で1が沢山連続しなければ良い
- ＊＊…＊ の部分でブロックの番号を3進数9桁で書く

$$\underbrace{?\,*\cdots\cdots?\,*}_{9\times 2}\;?\;0\;\underbrace{X\cdots\cdots\cdots X}_{19}$$

$L = 33$　（80点）

- 図のように、間に3つごとに0を挟めばよい（9桁なので、ちょうど３つずつに分かれる）
- 右端で必要なX…Xの長さが減る

$$\underbrace{?\ *\ \cdots}_{3\times 2}\ ?\ 0\ \underbrace{?\ *\ \cdots}_{3\times 2}\ ?\ 0\ \underbrace{?\ *\ \cdots}_{3\times 2}?\ 0\ \underbrace{X\cdots\cdots X}_{8}$$

$L=31$ （88点）

- 前の解法では、3進数9桁の間に0を2つ挟んで、＊ の部分でXが4連続しないようにした
- 3進数10桁であってXが4連続しないものを選ぶと、減る

$L = 32$ （天才） （84点）

- 3進数が書けるが、あえて1と2だけを使って2進数14桁を書く
- * を、Annaが自由に決められる1か2の値とする
- 右端が工夫されている

$$\underbrace{?\,*\cdots\cdots\,?\,*}_{14\times 2}\,?\ X\ 0$$

$L = 32$ （天才） （84点）

- 0になりうるのは 0 と ? の場所
- 0が一つしかない場合：そこが右端の0
- 0が二つ以上ある場合：右端の0だけ、次の0との距離が奇数

→右端の0の位置が分かる

$$\underbrace{?\ *\cdots\cdots\cdots\ ?\ *}_{14\times 2}\ ?\ X\ 0$$

小ブロックに分ける解法（de Bruijn 列）

L ＝ 34 -> 31 -> 29 -> 28

de Bruijn 列

- k進数N桁のde Bruijn 列…k進数n桁の文字列は$\boldsymbol{k^N}$通りあるが、それらがちょうど一回ずつ長さNの文字列として現れるような列
- これは巡回させることができる
- 以下のグラフの一筆書きに対応する
- 頂点：k進数N-1桁の各文字列
- 辺：k進数N桁の各文字列に対応し、その前N-1桁から後ろN-1桁の頂点へ有向辺

de Bruijn 列

- 有向グラフが一筆書きできる条件…連結&すべての頂点で入次数と出次数が等しい
- 前頁のグラフはその条件を満たす

→de Bruijn 列は存在

de Bruijn 列の拡張

- 逆に、グラフがその条件を保っていれば、de Bruijn 列のようなものが作れる
- k進数N桁の文字列のうち、いくつかを取り除いても、それらがちょうど一回ずつ出てくるような列が作れることがある
- 例えば、「3進数11桁の文字列のうち、0が一回以上出てくるもの」についても、それらがちょうど一回ずつ出てくるような列が作れる（グラフが、連結で各頂点の入次数と出次数が等しいため）
- これを拡張 de Bruijn 列と呼ぶことにする

$L = 34$ （76点）

- ? * X を1ブロックとしてこれを繰り返す
- * の部分には、「3進数11桁のうち一回以上0が出てくるもの」からなる拡張de Bruijn 列を書く

? * X
? * X
⋮
? * X

$L = 34$ （76点）

- 11ブロック分見て、mod 3ごとに、一回以上0が出てくるか見る
- 結果がxoxのとき、* になっている余りはoの所
- 結果がooxのとき、* になっている余りは右側のoの所
- Brunoは拡張de Bruijn列から整数を復元すれば良い

? * X
? * X
⋮
? * X

$L=31$ （88点）

- ？＊？＊X を1ブロックとしてこれを繰り返す
- ＊ の部分二つには、
- 「3進数6桁のうち一回以上0が出てくるもの（665個）」
- 「そこから0…0を除いたもの（664個）」
- からなる拡張de Bruijn 列をそれぞれ繰り返し書く
- 6ブロック分見て、mod 5ごとに、一回以上0が出てくるか見る
- 結果がNoになる余りは？とXの所だけ

→前のL=32解法と同様に、次の場所との距離が奇数な所がX

$L = 31$ （88点）

- 周期が665, 664 のde Bruijn 列を合わせると、周期はLCM(665,664)になる
- Brunoは得た二つの整数から中国剰余定理を使って場所を復元
- 5×LCM(665,664)>=500000で、通る

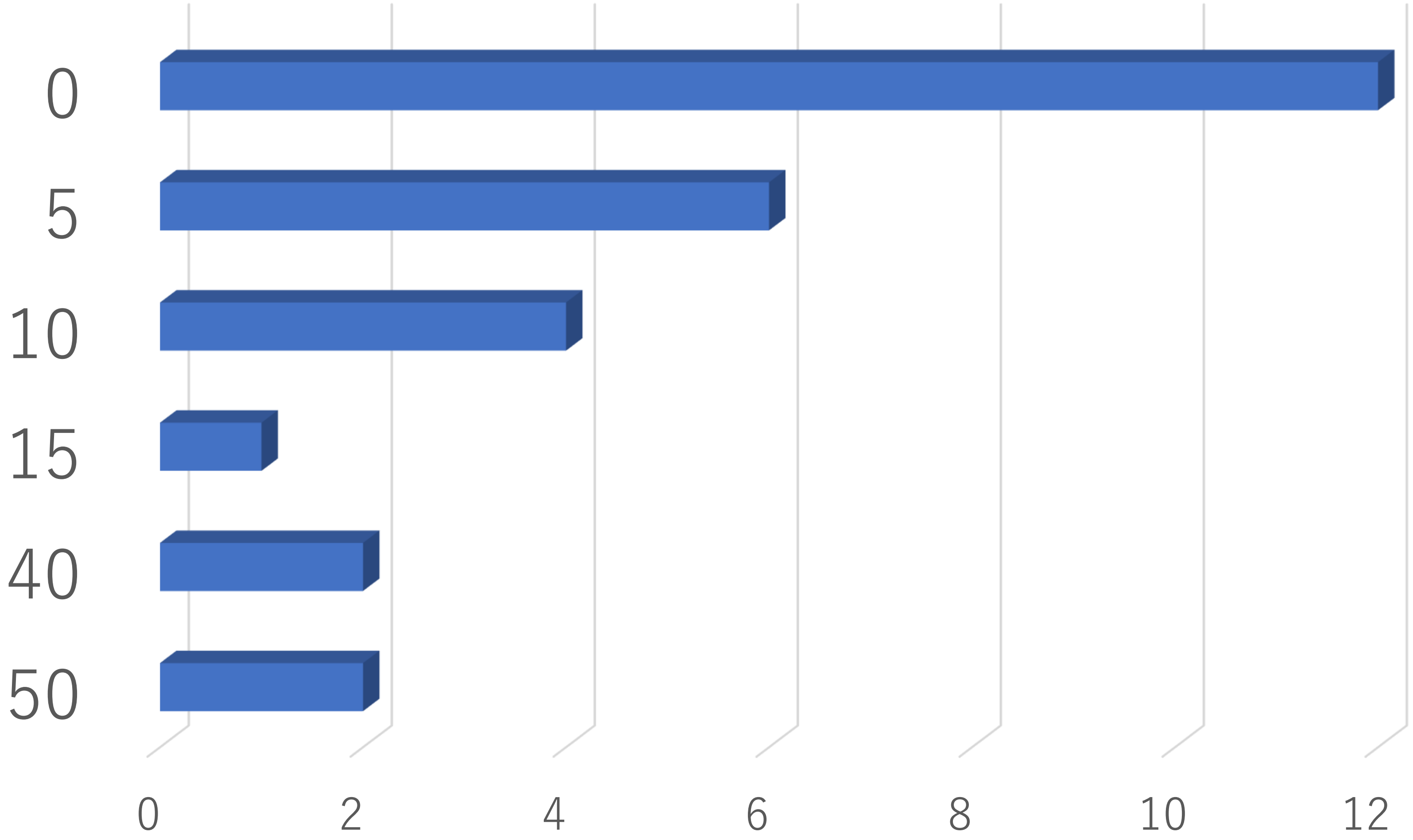
$L = 29$ （96点）

- ？＊？＊？＊X を1ブロックとしてこれを繰り返す
- ＊ の部分三つには、
- 「3進数4桁のうち一回以上0が出てくるもの（65個）」
- 「そこから0000を除いたもの（64個）」
- 「そこから0101と1010を除いたもの（63個）」
- からなる拡張de Bruijn 列をそれぞれ繰り返し書く
- 余りの特定、復元（中国剰余定理）も先ほどと同様
- 7×LCM(65, 64, 63) >=500000 で、通る

$L = 28$ （100点）

- ？＊？＊？＊？＊X を1ブロックとしてこれを繰り返す
- ＊ の部分四つには、
- 「3進数3桁のうち一回以上0が出てくるもの（19個）」
- 「010,101を除いたもの（17個）」
- 「010,101,000を除いたもの（16個）」
- 「010,101,020,202を除いたもの（15個）」
- からなる拡張de Bruijn 列をそれぞれ繰り返し書く
- 9×LCM(19, 17, 16, 15) >=500000 で、通る

得点分布（JOI）



得点分布（JOIG）

10点　　２人
0点　　7 人