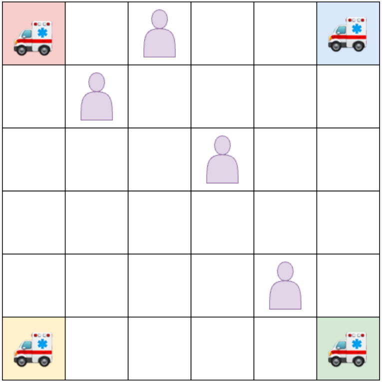
救急車 (Ambulance) 解説

林涼太郎 (Forested)

JOI 競技 2 日目 / JOIG 競技 1 日目

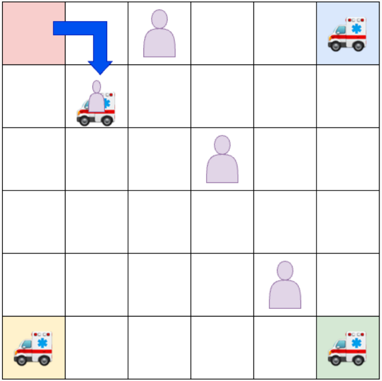
問題概要

問題概要



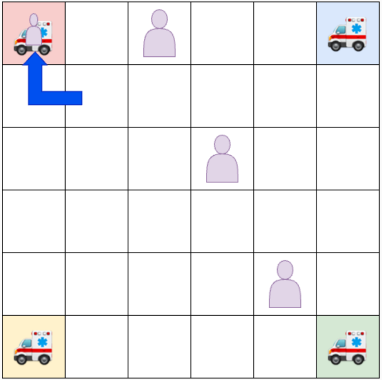
- $L \times L$ のグリッドがあり、四隅に病院がある
- 各病院には専属の救急車がある
- N 人の人がグリッド上にいる

問題概要



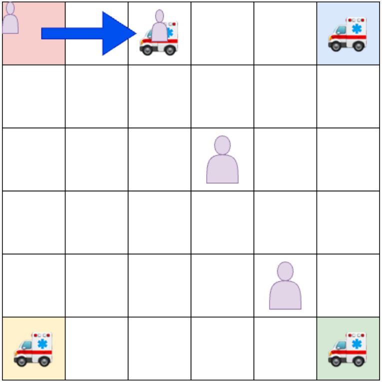
- 救急車は 1 単位時間あたり 1 マス動ける
- 各救急車には 1 人まで乗せられる
- 専属の病院でのみ人を下ろせる

問題概要



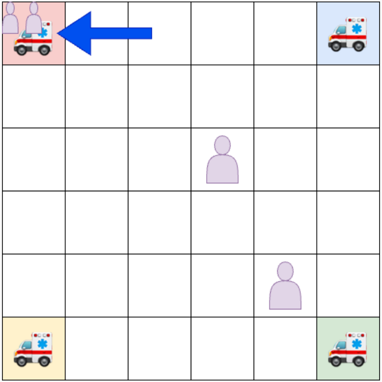
- 救急車は 1 単位時間あたり 1 マス動ける
- 各救急車には 1 人まで乗せられる
- 専属の病院でのみ人を下ろせる

問題概要



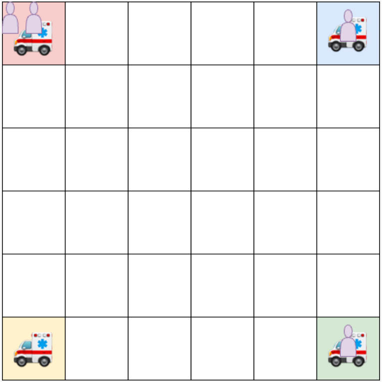
- 救急車は 1 単位時間あたり 1 マス動ける
- 各救急車には 1 人まで乗せられる
- 専属の病院でのみ人を下ろせる

問題概要



- 救急車は 1 単位時間あたり 1 マス動ける
- 各救急車には 1 人まで乗せられる
- 専属の病院でのみ人を下ろせる

問題概要



- 4 台の救急車をうまく動かして、T 単位時間以内に人を全て病院に移動させられるか？

制約

- $L \leq 10\,000$
- $N \leq 160$
- $T \leq 20\,000$

小課題 1, 2: T が小さい

小課題 3, 4, 5, 6: N が小さい（5 は追加制約）

小課題 7: 満点

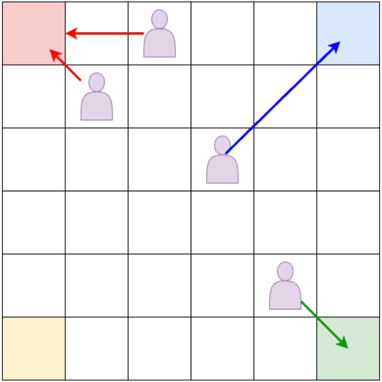
小課題 1 ($T \leq 50$)

考察

救急車の動きを考える

- ある人のもとへ向かう→病院に連れて帰る、の繰り返し

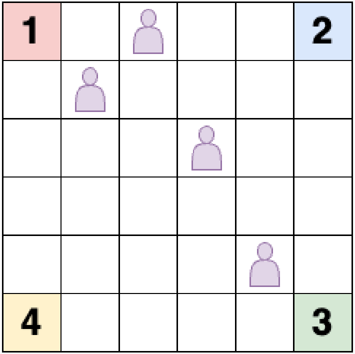
考察



それぞれの人について、4 つの病院のうち 1 つを割り当てる

各病院について、往復の距離の和が T 以下になれば OK

解法



便宜上このように病院に番号を振っておく

DP をする

$\mathrm{DP}[i][w][x][y][z]$: 人 $1, 2, \ldots, i$ について病院の割り当てを決めて、現時点の病院 $1, 2, 3, 4$ の距離の総和がそれぞれ w, x, y, z になることはあるか？（True / False）

状態 $\Theta(NT^4)$、遷移 $\Theta(1)$

高速化

$N = 160, T = 50$ のとき $NT^4 = 10^9$ で、やや厳しい

往復の距離の和が T 以下 $\iff$ 片道の距離の和が $T/2$ 以下だから、$T' := \lfloor T/2 \rfloor$ として、片道の距離の和を T' 以下にできるかを判定するように DP すると、大幅に高速化できる

- 後の小課題でも使える、必須レベルの定数倍高速化

小課題 2 ($T \leq 160$)

解法

小課題 1 の DP を速くする

よく言われていること：bool **値を持つ** DP **は無駄が多い**

解法

$\mathrm{DP}[i][w][x][y]$: 人 $1, 2, \ldots, i$ について病院の割り当てを決めて、現時点の病院 $1, 2, 3$ の距離の総和がそれぞれ w, x, y になったときの、病院 4 の距離の総和の最小値（値は**整数**）

状態 $\Theta(NT^3)$、遷移 $\Theta(1)$

小課題 3 ($N \leq 10$)

解法

今度は N が小さい→割り当て 4^N 通りを全て試せる

各割り当てについて条件のチェックは $\Theta(N)$ 時間でできるので、全体で $\Theta(4^N N)$

小課題 1, 2 より先に思いつく人もいるかも

小課題 4 ($N \le 20$)

解法 1

「人 $1, 2, \ldots, N$ を 4 つの病院に割り当てる」ということを言い換える

→「人 $1, 2, \ldots, N$ を好きな順番で並ばせて、さらに仕切りを 3 つ好きな位置に追加する」で同じことができる

解法 1

- 人 $1, 2, \dots, N$ を適当な順番で並ばせる
- 前から順に病院 1 との距離を計算していく
- 合計が T' を超える直前で総和を 0 にリセットし、次からは病院 2 との距離を計算していく
- リセット 3 回以内で済めば割り当て成功

これを bit DP にする

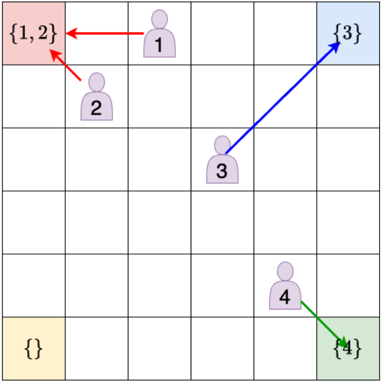
解法 1

列を前から決めていくことにする

$\mathrm{DP}[i][S]$: これまでのリセット回数が i 回で、すでに列に並んだ人の集合が S のときの現在の総和の最小値

状態 $\Theta(2^N)$ で遷移 $\Theta(N)$ だから、全体で $\Theta(2^N N)$ 時間

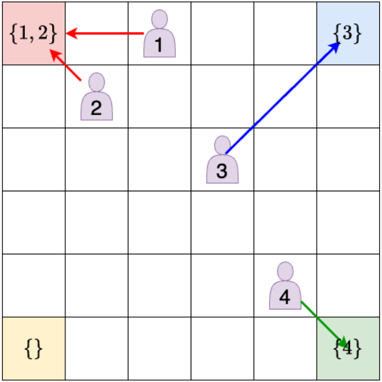
解法 2



4^N 通り全ては試せないので、高速化を考える

各病院について、担当する人の集合を $\{1, 2, \dots, N\}$ の部分集合から選んで定めると考える

解法 2



(病院, 人の集合) 全てに対して、距離の総和が T' 以下であるか確認：これは $\Theta(2^N N)$ 時間

病院 $1, 2, 3, 4$ に対応する集合 S_1, S_2, S_3, S_4 を選んで、
$S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = \{1, 2, \dots, N\}$ となるようにしたい

列 $a = (a_0, a_1, \dots, a_{2^N-1})$ と $b = (b_0, b_1, \dots, b_{2^N-1})$ について、

$$c_k = \sum_{i \,\mathrm{OR}\, j = k} a_i b_j$$

で定まる $c = (c_0, c_1, \dots, c_{2^N-1})$ を計算することが実は $\Theta(2^N N)$ 時間でできる

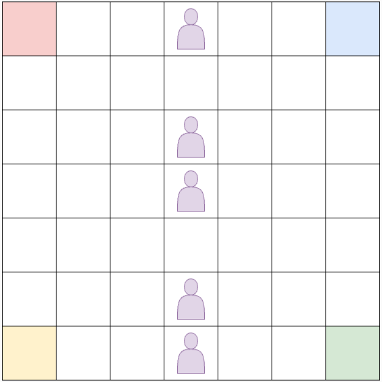
- OR は bit ごとの論理和
- 詳細は省略

これを 3 回行えば $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = \{1, 2, \dots, N\}$ となるような S_1, S_2, S_3, S_4 が取れるかわかる

全体で $\Theta(2^N N)$ 時間

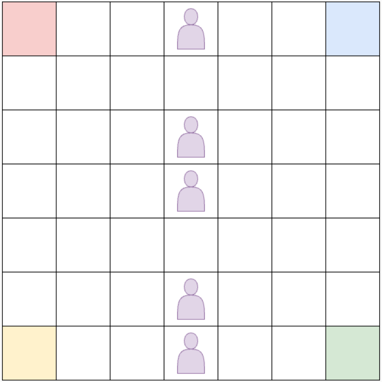
小課題 5 ($N \leq 45$, L は奇数, $Y_k = (L+1)/2$)

制約



縦の中心の軸上に全ての人が乗っている

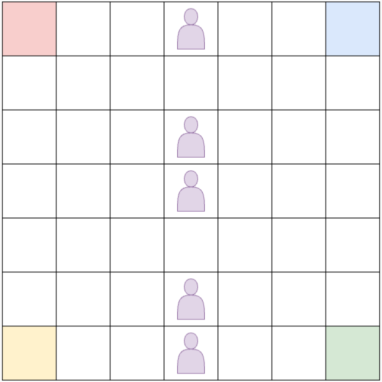
制約



縦の中心の軸上に全ての人が乗っている

病院 1 に割り当てるのと 2 に割り当てるので距離が変わらない！（3 と 4 でも同様）

制約

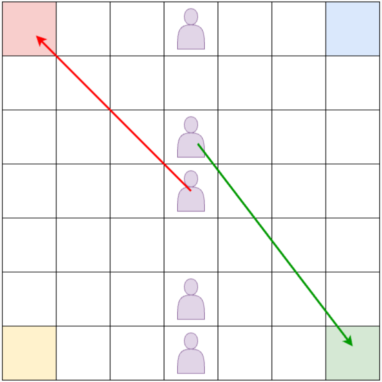


縦の中心の軸上に全ての人が乗っている

病院 1 に割り当てるのと 2 に割り当てるので距離が変わらない！（3 と 4 でも同様）

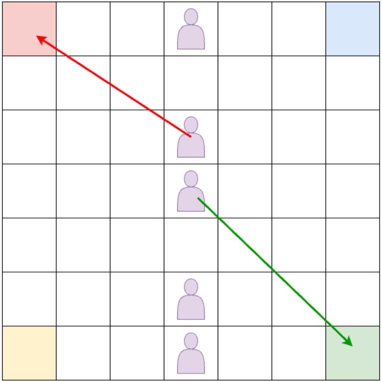
上と下のどちらに割り当てるかが大事

観察



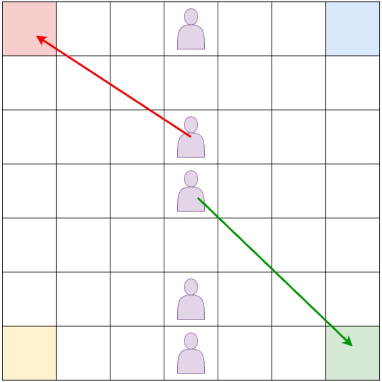
こういう割り当てがあったとき、

観察



こうしてもどの病院も損しない

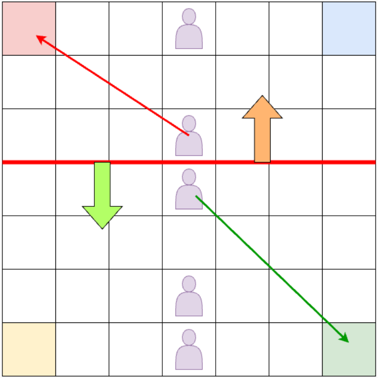
観察



こうしてもどの病院も損しない

→ X_k が小さい人は上 2 つの病院に、大きい人は下 2 つの病院に割り当てるとして良い

観察



ちゃんと言うと、N 人に X の昇順に番号を付け直したとき

- ある k が存在して、人 $1, 2, \ldots, k$ は病院 $1, 2$ に、人 $k+1, k+2, \ldots, N$ は病院 $3, 4$ に割り当てる

という形の割り当てだけ考えれば良い

解法

k を 0 から N まで全て試す

それぞれの k について部分和問題を解く

- 人が k 人 / $N-k$ 人いて総和を T' 以下にするから $\Theta(NT)$ 時間

全体で $\Theta(N^2T)$ 時間

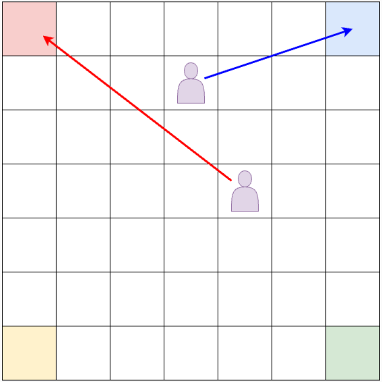
小課題 6 ($N \leq 45$)

観察

小課題 5 がヒントっぽい感じがする

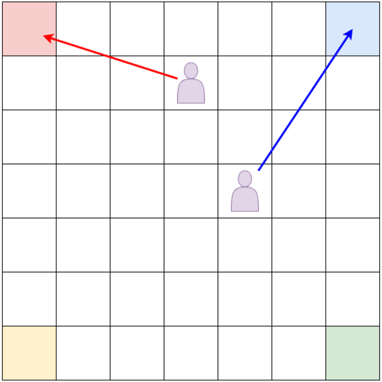
一般の場合でもうまく配置を絞り込めないか？

観察



病院 $1, 2$ についてうまく swap できないか？

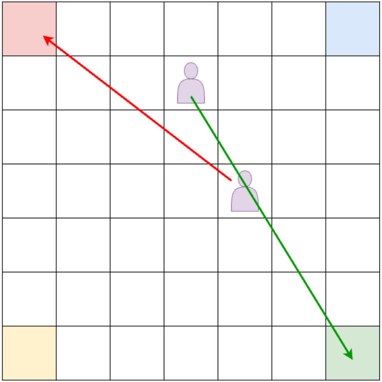
観察



病院 $1, 2$ についてうまく swap できないか？

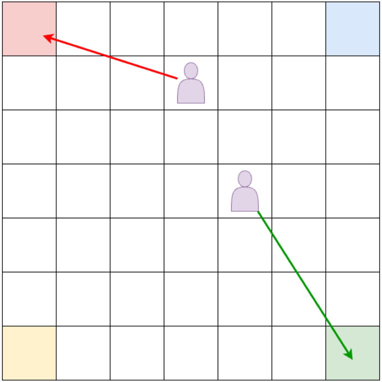
→病院 1 は得して 2 は損してしまった、失敗

観察



実は病院 $1, 3$ についてならうまくいく

観察



実は病院 $1, 3$ についてならうまくいく

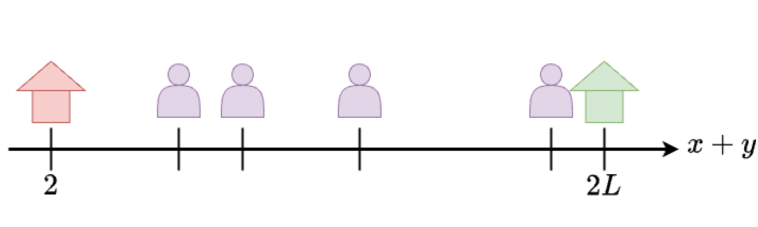
観察

(x, y) にいる人について、

- 病院 1 との距離：$(x + y) - 2$
- 病院 3 との距離：$2L - (x + y)$

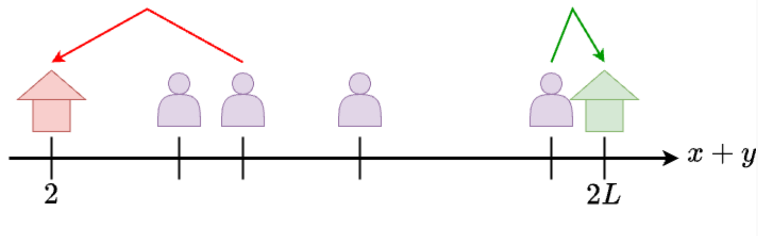
$x + y$ と 2 または $2L$ との差になっている！ →一次元で考えられそう

観察



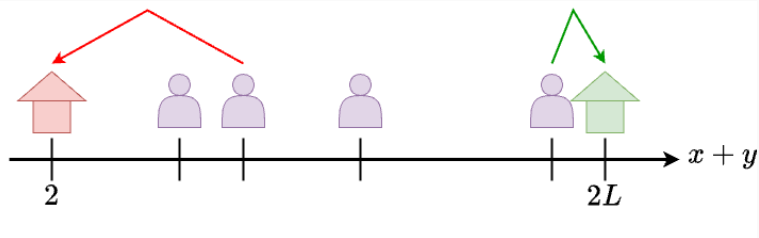
人 i について $X_i + Y_i$ の値を数直線に乗せてみる

観察



左の人は病院 1 に割り当てたい、右の人は病院 3 に割り当てたい

観察



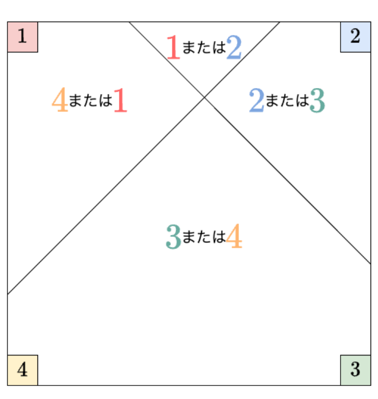
ちゃんというと、ある整数 k が存在して、この数直線について

- 左 k 人以外病院 1 を使わない
- 右 $N - k$ 人以外病院 3 を使わない

という形の割り当てのみ考えればよい

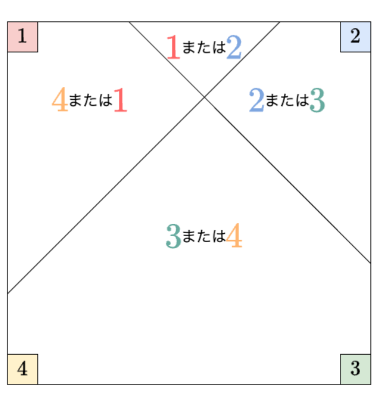
病院 2 と 4 についても、$X_i - Y_i$ の数直線を考えると同じことが言えるので…？

観察



こうなる

解法

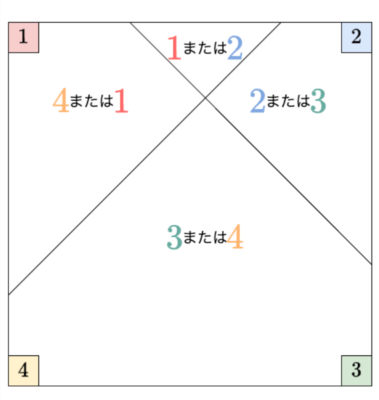


領域の区切り方 $(N+1)^2$ 通りをとりあえず全て試す

各領域について、片方の病院の負担を減らすと、もう片方の病院の負担が増えるかもしれない

$\rightarrow$ DP しよう！

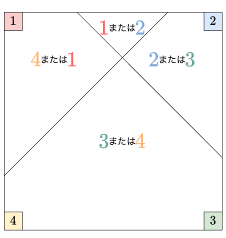
解法



DP$[i]$:「x または y」の領域内において、病院 x の距離の総和を i 以下にするときの、病院 y の距離の総和の最小値

これを $(x, y) = (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)$ について計算（$\Theta(NT)$ 時間）

解法



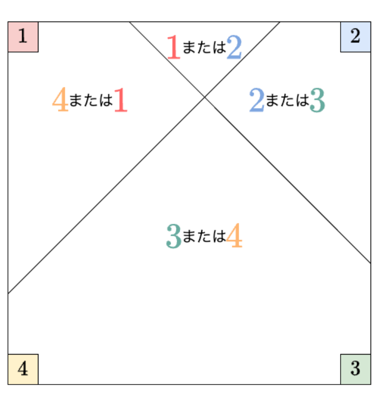
1. 「1 または 2」の領域における病院 1 の距離の総和を決め打つ
2. 「1 または 2」の領域における病院 2 の距離の総和がわかる
3. 「2 または 3」の領域における病院 2 の距離の総和がわかる
4. 「2 または 3」の領域における病院 3 の距離の総和がわかる
5. $\cdots$

最後までやって、整合性を確認すればよい（$\Theta(T)$ 時間）

$\Theta(NT) + \Theta(T)$ 時間が $(N+1)^2$ 回あるので、全体で $\Theta(N^3T)$ 時間

小課題 7（追加制約なし）

復習

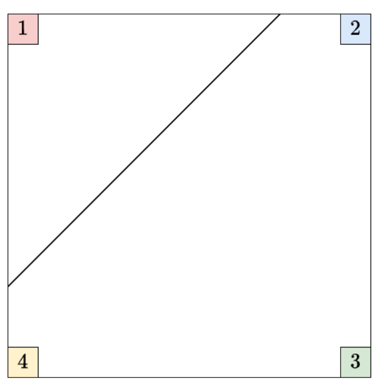


小課題 6 の解法を復習

- DP テーブルの計算：$\Theta(N^3T)$ 時間
- 決め打って整合性確認：$\Theta(N^2T)$ 時間

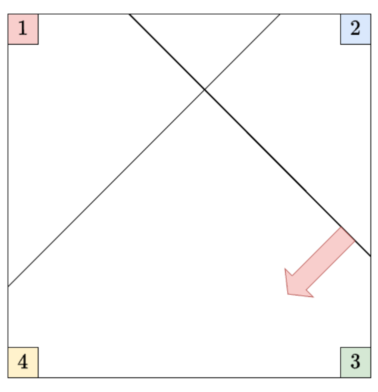
DP テーブルを $\Theta(N^2T)$ 時間で計算できればよさそう

解法



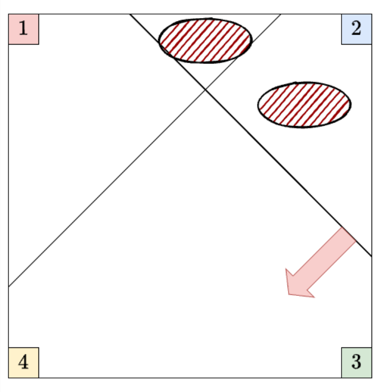
とりあえず $X_i + Y_i$ の切れ目を固定

解法



$X_i - Y_i$ の切れ目をこの向きに動かしてみる

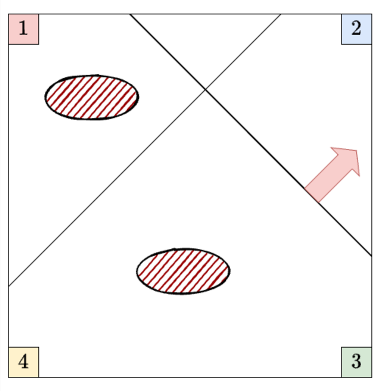
解法



$X_i - Y_i$ の切れ目をこの向きに動かしてみる

この部分の DP テーブルは切れ目を 1 人分動かすたびに $\Theta(T)$ 時間で更新できる！

解法



逆向きにもやれば残り 2 つの DP テーブルも計算できる

全ての DP テーブルが合わせて $\Theta(N^2T)$ 時間で計算できた！

実装について

TL に余裕はないかも

- 使い回せる配列を使い回す
- in-place に更新できる部分はそうする

などで高速化しましょう