

Snowballs2 解説

Editorialist: physics0523

問題概要

葵さんは雪遊びをしている

N 個の雪玉が並んでおり、左から大きさ $A_1, A_2, \dots, A_N$

隣接する雪玉が以下の条件を満たす時に限り、合成できる

- 左側の雪玉の大きさを l 、右側の雪玉の大きさを r としたとき、
 $0 \leq l - r \leq 1$ を満たす

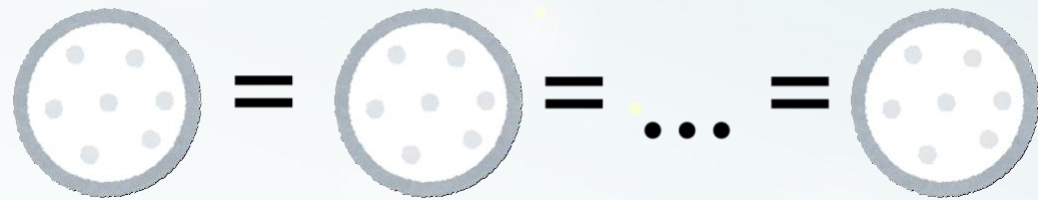
合成後、その場に大きさ $l + r$ の雪玉ができる

合成を繰り返し雪玉をひとつにできるか判定せよ

$2 \leq N \leq 500000, 1 \leq A_i \leq 10^{12}$

ふたつの小課題群

$$A_1 = A_2 = \dots = A_N \text{ (15点)}$$



$$N \leq 500000 \text{ (30点)}$$

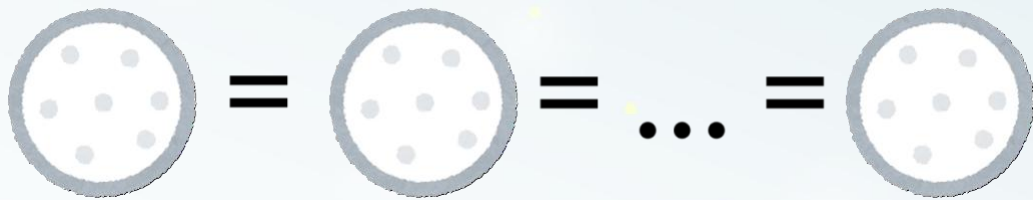
$$N \leq 5000 \text{ (19点)}$$

$$N \leq 200 \text{ (18点)}$$

$$N \leq 8 \text{ (18点)}$$

ふたつの小課題群

$$A_1 = A_2 = \dots = A_N \text{ (15点)}$$



$$N \leq 500000 \text{ (30点)}$$

$$N \leq 5000 \text{ (19点)}$$

$$N \leq 200 \text{ (18点)}$$

$$N \leq 8 \text{ (18点)}$$

全ての雪玉の大きさが同じ場合

$A_1 = A_2 = \dots = A_N$ である場合を考える
いくつか手で試してみる

$(1,1,1,1,1) \rightarrow (1,1,1,2) \rightarrow (2,1,2) \rightarrow (3,2) \rightarrow (5)$ OK! (入力例1)

$(2,2,2) \rightarrow (4,2) \rightarrow \times$ (入力例2)

$(3,3,3,3) \rightarrow (3,3,6) \rightarrow (6,6) \rightarrow (12)$ OK!

$(1,1,1) \rightarrow (2,1) \rightarrow (3)$ OK!

$(5,5,5,5,5) \rightarrow (10,5,5,5) \rightarrow (10,10,5) \rightarrow (20,5) \rightarrow \times$

更にたくさん試す

		雪玉の個数								
		1	2	3	4	5	6	7	8	
雪玉の大きさ	1	o	o	o	o	o	o	o	o	
	2	o	o	x	o	x	x	x	o	
	3	o	o	x	o	x	x	x	o	
	4	o	o	x	o	x	x	x	o	
	5	o	o	x	o	x	x	x	o	

予想

試した結果を見ると、次の予想ができる

雪玉の大きさが全て等しい時、雪玉をひとつにできる必要十分条件は次の通りである:

- 雪玉の大きさが全て 1 である
- 雪玉の個数が 2^k べき ($= 2$ の累乗、 $1, 2, 4, 8, 16, \dots$) である

実際にこれは正しい

証明 (雪玉の大きさが全て 1 である場合)

雪玉の個数が 1 個である場合は明らか
そうでない時を数学的帰納法により示す

(a) 雪玉の個数 N が偶数の時

仮定より、左側 $N/2$ 個の雪玉はひとつに合成できる

仮定より、右側 $N/2$ 個の雪玉もひとつに合成できる

出来た 2 つの大きさ $N/2$ の雪玉を合成すればよい

(b) 雪玉の個数 N が奇数の時 も同様に証明できる

証明 (雪玉の個数が 2 べきである場合)

雪玉の個数が 1 個である場合は明らか
そうでない時を数学的帰納法により示す
雪玉の個数が 2^k 個の場合

仮定より、左側 2^{k-1} 個の雪玉はひとつに合成できる

仮定より、右側 2^{k-1} 個の雪玉もひとつに合成できる

このとき出来た 2 つの雪玉は同じ大きさなので、それらを合成すればよい

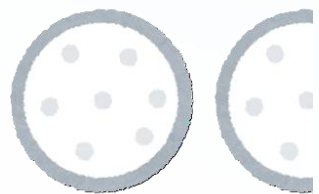
証明(残り)

雪玉の大きさが1でなく、雪玉の個数が2べきでもない場合
雪玉の個数が2べきではないので、どこかで元々の個数の異なる
雪玉を合成することになる

雪玉の大きさが2以上かつ全て同じなので、この合成について雪
玉の大きさの差の絶対値は2以上になってしまう

これは合成の条件である $0 \leq l - r \leq 1$ に反する

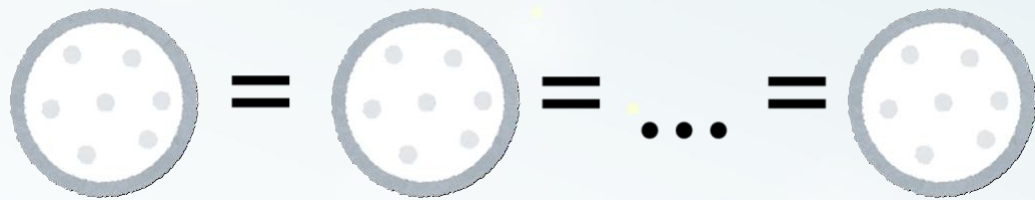
以上で予想は証明された



15 / 100

ふたつの小課題群

$$A_1 = A_2 = \dots = A_N \text{ (15点)}$$



$$N \leq 500000 \text{ (30点)}$$

$$N \leq 5000 \text{ (19点)}$$

$$N \leq 200 \text{ (18点)}$$

$$N \leq 8 \text{ (18点)}$$

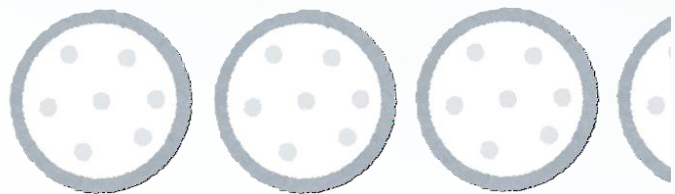
$N \leq 8$ の場合

N が極端に小さいので、全探索できそう

実際、 $O(N!)$ かけて全探索する方法がいくつかある

- (雪玉の大きさの列を頂点とみなした) **BFS / DFS**
- 「左から k 個目と $k + 1$ 個目の雪玉を合成」の列を $(N - 1)!$ 通り調べ尽くす全探索

どれも多少複雑だが、実装力をつけるとこの手の全探索を気軽に実装でき、様々なケースの観察やデバッグ等に使える



33 / 100

$N \leq 200$ の場合

雪玉の個数が多いので、 $O(N!)$ かけて全探索すると地球が滅亡してしまう...



本制約では多項式時間、特に $O(N^3)$ 程度で計算を終わらせる必要がある

重要な性質

雪玉の合成には、次の重要な性質がある

- ある雪玉は、はじめ左から $l, l+1, \dots, r$ 個目の雪玉であったものを合成して出来たものである。

つまり、ある時点でのひとつの雪玉は初めの雪玉の列のひとつの区間に対応する。また、区間 $[l, r]$ に対応する雪玉の大きさは (合成順がどうであれ) $A_l + A_{l+1} + \dots + A_r$ である。

これで、列の問題を区間の問題に落とし込むことができた
このとき、ひとつの有用な方法がある

テクニック：区間DP

区間の構造を持つ問題に対して強力な動的計画法

$\text{dp}[\text{左端 } l][\text{右端 } r] = \{\text{区間 } [l, r] \text{ に対する情報}\}$ という形の DP

この DP テーブルを $r - l$ の小さい方から更新することで、ある区間に対する情報を求める際にその区間より短い区間の情報は全て求まっているので、それらが見える

時間計算量は

- 各 $\text{dp}[l][r]$ を $O(r - l)$ で求めた場合 $O(N^3)$
- 各 $\text{dp}[l][r]$ を $O(1)$ で求めた場合 $O(N^2)$

空間計算量は $O(N^2)$

ゆーしゃ あおい は わざ 「くかん DP」 を おぼえた！

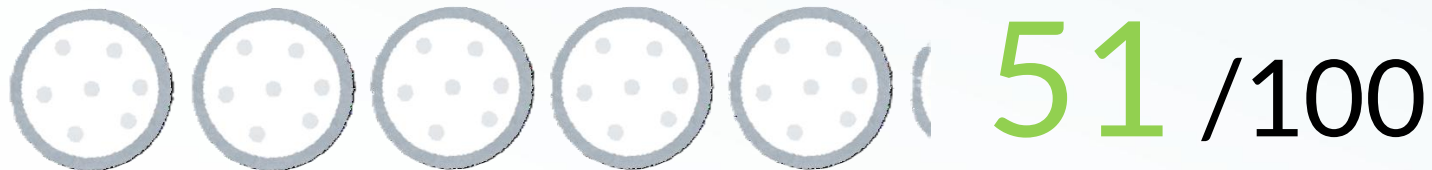
$N \leq 200$ の場合 (区間DP)

$dp[\text{左端 } l][\text{右端 } r] = \{ \text{区間 } [l, r] \text{ をひとつにできるなら合成後の雪玉の大きさ / 合成できないなら } 0 \}$ という DP を考える

$dp[l][r]$ は次のように求める

- はじめ、 $dp[l][r] = 0$ とする
- $m = l, l + 1, \dots, r - 1$ について、次を試す
 - $dp[l][m] \neq 0, dp[m + 1][r] \neq 0$ であり $0 \leq dp[l][m] - dp[m + 1][r] \leq 1$ であれば $dp[l][r]$ を $dp[l][m] + dp[m + 1][r]$ に更新する。

これで時間計算量 $O(N^3)$ で解けた



$N \leq 5000$ の場合 (区間DP)

$\text{dp}[\text{左端 } l][\text{右端 } r] = \{ \text{区間 } [l, r] \text{ をひとつにできるなら } 1 / \text{合成できないなら } 0 \}$ という DP を高速に行う

$\text{dp}[l][r]$ を工夫して求めたい

区間 $[l, m]$ に対応する雪玉と $[m + 1, r]$ に対応する雪玉とが合成できるためには、 $0 \leq (A_l + \dots + A_m) - (A_{m+1} + \dots + A_r) \leq 1$ を満たすことが必要である

$(A_l + \dots + A_m) - (A_{m+1} + \dots + A_r)$ は整数なので、この値について 0, 1 の場合のみ調べればよい

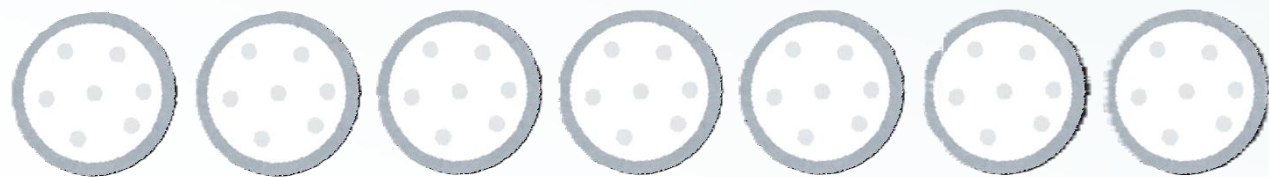
$N \leq 5000$ の場合 (区間DP)

$k = 0, 1$ について、 $(A_l + \dots + A_m) - (A_{m+1} + \dots + A_r) = k$ を満たす m を二分探索

$A_l + \dots + A_r$ は累積和 or 予計算で求める

そのような m について $dp[l][m] = 1$ かつ $dp[m+1][r] = 1$ なら $dp[l][r] = 1$ と更新する

これで時間計算量 $O(N^2 \log N)$ で解けた



70 / 100


$$N \leq 500000$$



GAME OVER

ごせいちょう ありがとう ごさいました

GAME OVER

*「おお あおい!

しんでしまうとは なさけない…」

CONTINUE?

▶ はい
いいえ

$N \leq 500000$ の何が難しいか？

区間 **DP** をしようとする以下の問題が発生する

- 時間計算量が $O(N^2)$ 以上
- 空間計算量も $O(N^2)$

これでは制約に収まらないので、劇的に違う発想が必要そう

テクニック：後ろから見る

時系列順に従って扱うと難しい問題に対するアプローチ
時系列順を逆向きに考えると簡単に扱えることがある

今回の問題では次の通り

時系列順向き：「雪玉を 2 つ選ぶ」→「それらを合成し 1 つに」

時系列逆向き：「雪玉を 1 つ選ぶ」→「それらを分解し 2 つに」

ゆうしゃ あおい は わざ 「うしろからみる」 を おぼえた！

観察

ある雪玉 (大きさ x) がどのように作られるか考える
大きさ x の雪玉が合成される直前の l, r について次が言える

- $l + r = x$
- $0 \leq l - r \leq 1$

観察

実は、大きさ x の雪玉が合成される直前の l, r は一意に定まる

(a) x が偶数の時

$l = r = x/2$ しかありえない

(b) x が奇数の時

$l = \lceil x/2 \rceil, r = \lfloor x/2 \rfloor$ しかありえない

観察

先程の観察から、以下の事実が導かれる

「実は、雪玉をひとつにできるならその手順は一意に定まる」

というのも、後ろから見て「大きさ x の雪玉を、それらの元になった大きさ l, r の雪玉に分解する」を必要なだけ繰り返した上で、時系列を元に戻せば唯一の手順が求まる

tips

「実は、雪玉をひとつにできるならその手順は一意に定まる」
という事実には、複数の気づき方がある

- 初めから「後ろから見る」テクニックを使う (典型で解く)
- $N \leq 5000$ の場合の区間 DP にて、「区間 $[l, m]$ に対応する雪玉と $[m + 1, r]$ に対応する雪玉とが合成できる」を満たす m が少ない (実は一意である) ことに気づく (DPを高速化する)
- 小さなケースを実験して手順の通り数を調べると、どのようなケースでも 1 通りしか手順が無いことに気づく (実験で解く)

解法

ここまで来ると、後は高々 1 通りの手順をうまくシミュレーションするだけ

複数あるシミュレーションの方法のうちのひとつを示す

解法

$s = A_1 + A_2 + \dots + A_N$ とし、分解前の雪玉の列 $X = (s)$ から始めて、これと操作前の列 $Y = (A_1, A_2, \dots, A_N)$ とを比較する

- X の先頭 $= Y$ の先頭 であれば、その雪玉はもう分解の必要が無いので、 X の先頭と Y の先頭を削除し続行
- X の先頭 $> Y$ の先頭 であれば、 X の先頭を分解する必要がある
ので、 X の先頭を分解して続行
- X の先頭 $< Y$ の先頭 であれば、もうどうしようもないので答えは **No**

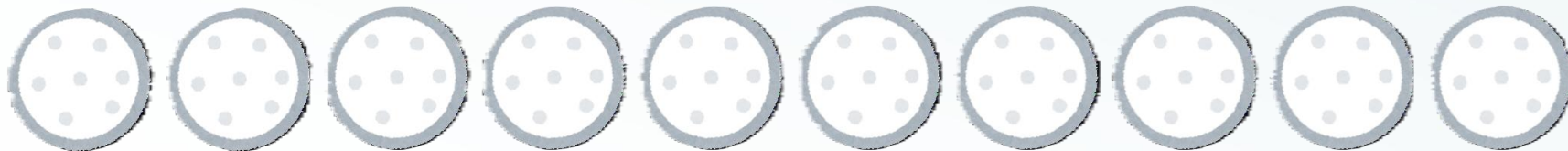
以上を繰り返し、 X, Y がともに空になれば答えは **Yes**

解法

先程の判定は、**deque** を使えば実装できる
時間計算量は $O(N)$

他にも以下の解法がある

- 雪玉の区間 $[l, r]$ を保持しながら分解できる高々 1 通りの場所で分解することを繰り返す (分解する場所は二分探索で求める)
 - **queue** を使ったり再帰を使ったりして実装可能、時間計算量は $O(N \log N)$
 - 二分探索をサボっても時間計算量 $O(N(\log N + \log A))$ で通る



100 / 100

得点分布

