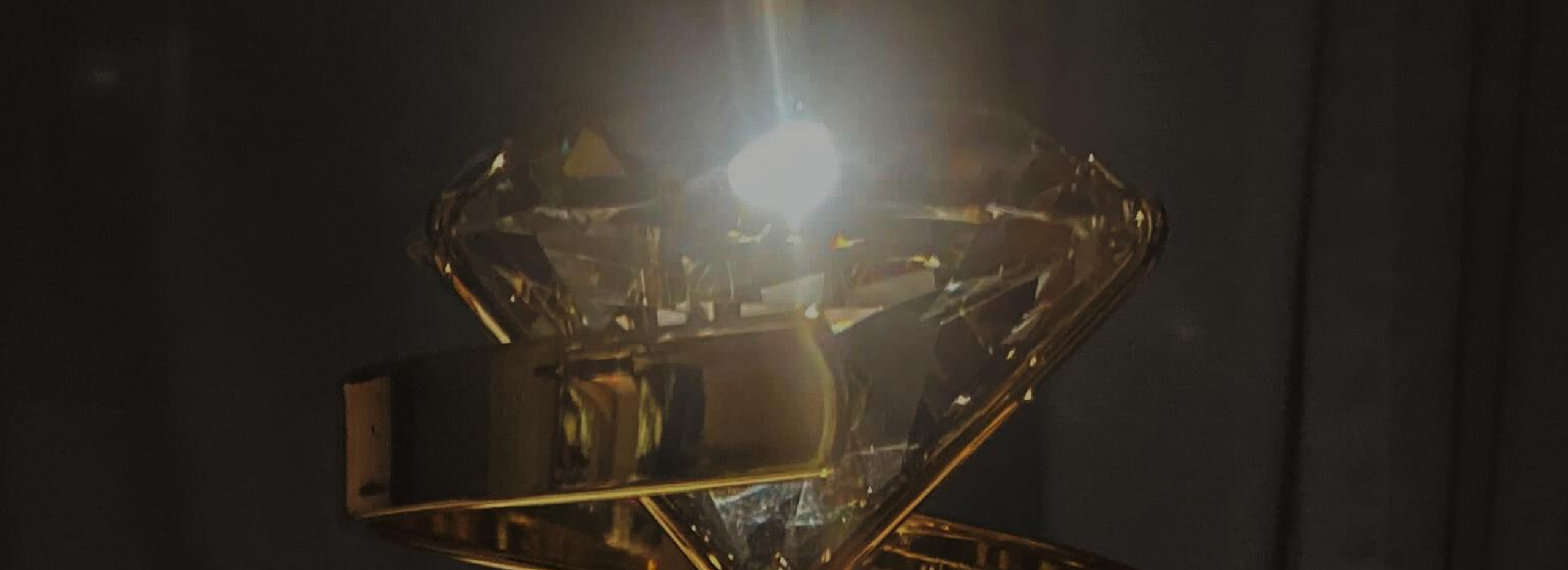




宇宙怪盗 (Space Thief) 解説

解説者: 米田 寛峻 (**square1001**)

2025 年 3 月 22 日

問題概要

N 頂点の木が与えられる

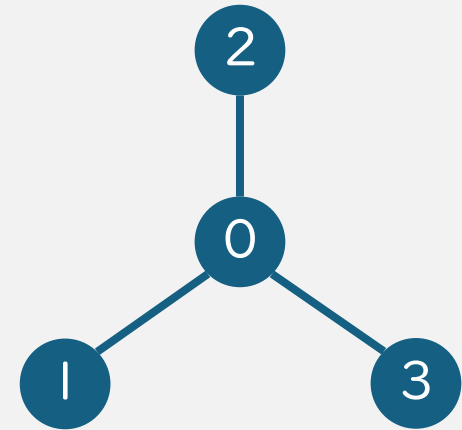
以下の質問を繰り返して、秘密の頂点 A, B を当てたい ($A \neq B$)

質問

木のすべての辺に自由に向きを付けて

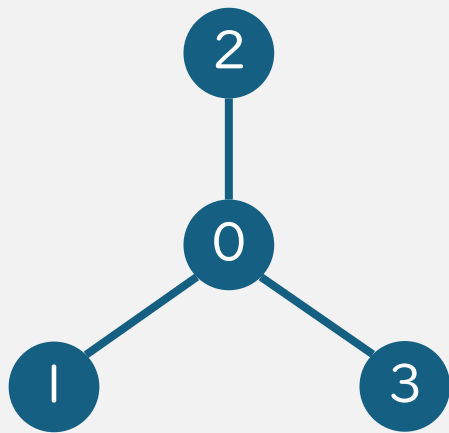
$A \rightarrow B$ に到達できるかどうか質問する

300 回以内の質問で A, B を特定せよ



問題概要

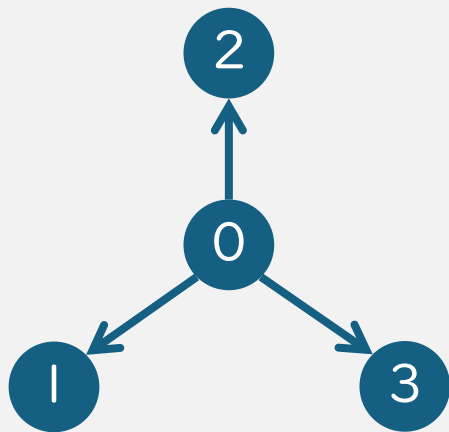
例: 4 頂点で辺 0-1, 0-2, 0-3 からなる木の場合



問題概要

例: 4 頂点で辺 $0-1$, $0-2$, $0-3$ からなる木の場合

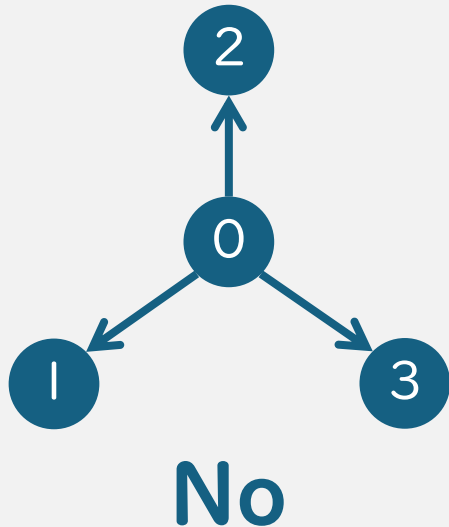
質問 1: この向き付けで $A \rightarrow B$ に到達できるか?



問題概要

例: 4 頂点で辺 $0-1$, $0-2$, $0-3$ からなる木の場合

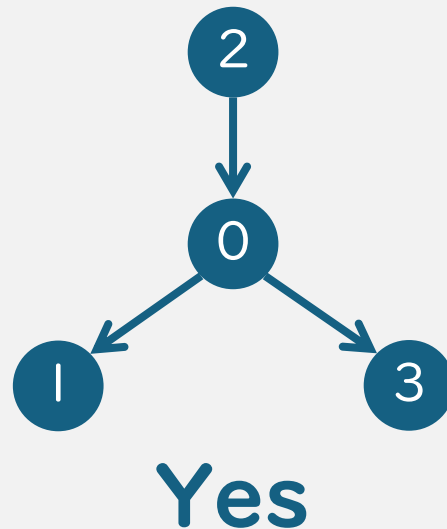
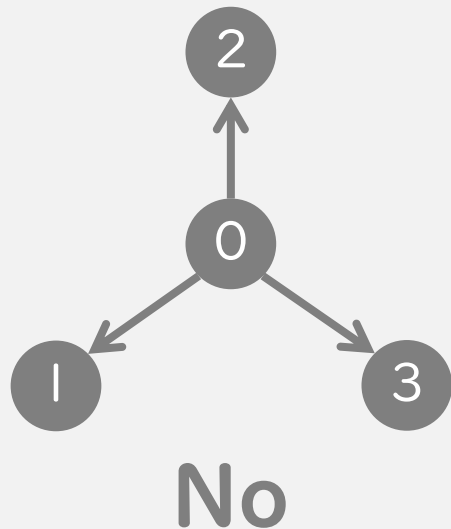
質問 1: この向き付けで $A \rightarrow B$ に到達できるか? (NO)



問題概要

例: 4 頂点で辺 $0-1$, $0-2$, $0-3$ からなる木の場合

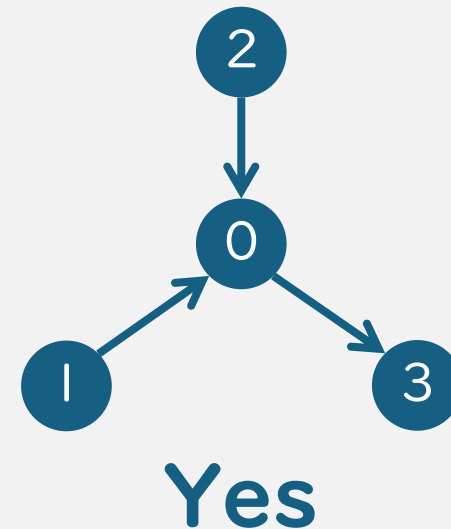
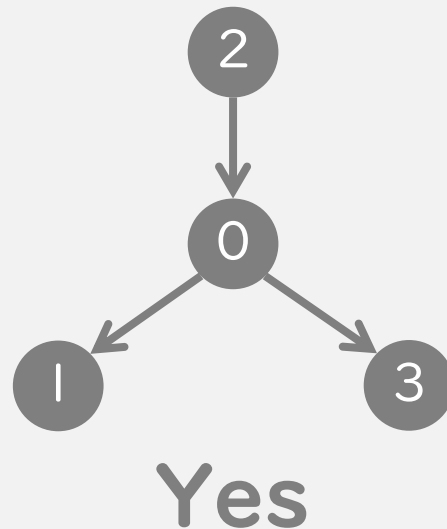
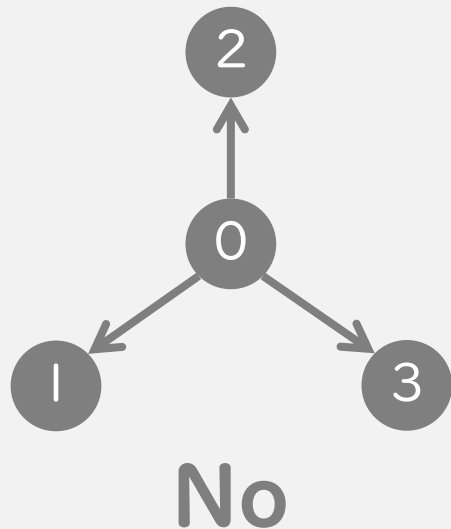
質問 2: この向き付けで $A \rightarrow B$ に到達できるか? (YES)



問題概要

例: 4 頂点で辺 0-1, 0-2, 0-3 からなる木の場合

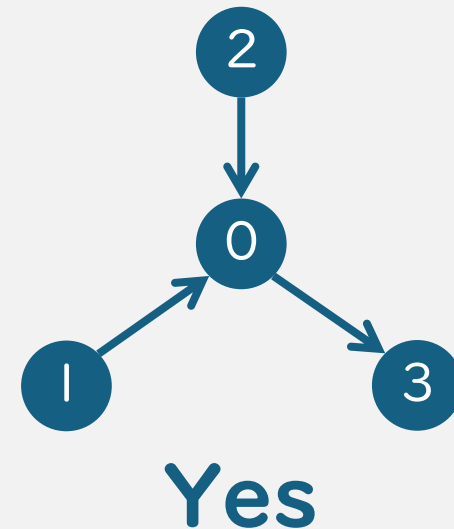
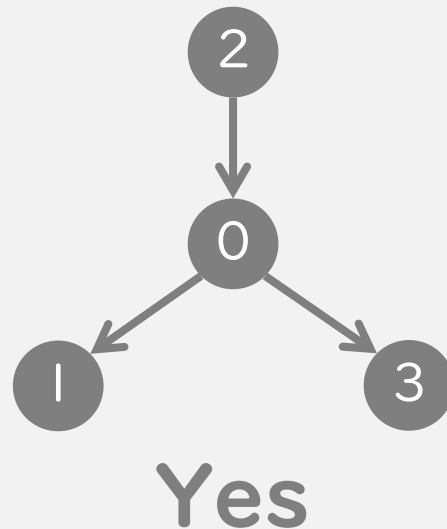
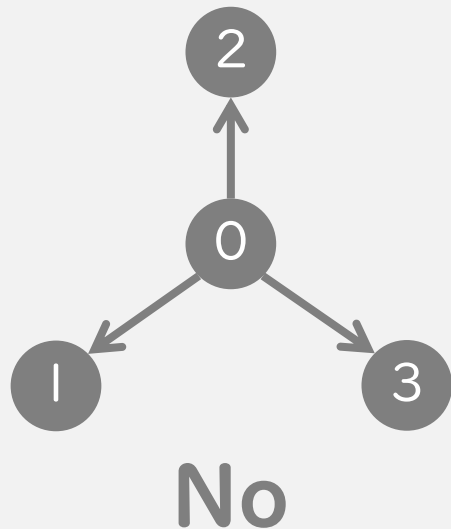
質問 3: この向き付けで $A \rightarrow B$ に到達できるか? (YES)



問題概要

例: 4 頂点で辺 0-1, 0-2, 0-3 からなる木の場合

この 3 つの情報から $(A, B) = (2, 3)$ と特定できる



問題概要

より一般の木で、少ない質問回数で解ければ、高得点が取れる

#1	11 点	$N \leq 10000$, 木はパスグラフ
#2	21 点	$N \leq 10000$, 木はスターグラフ
#3	4 点	$N \leq 8$
#4	12 点	$N \leq 50$
#5	8 点	$N \leq 150$
#6	8 点	$N \leq 250$
#7	32 点	$N \leq 10000$ (質問回数 70 以下で満点)
#8	4 点	木ではなく一般のグラフでも解く (質問回数 70 以下で満点)

小課題 1: パスグラフ

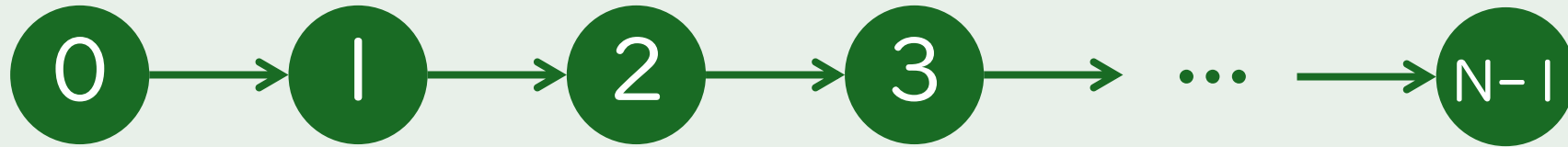
木がパスグラフの場合に解きたい



小課題 1: パスグラフ

最初に以下のような質問をする

Yes なら $A < B$ と、No なら $A > B$ と分かる



$A < B$ かどうか判別できる!

小課題 1: パスグラフ

最初に以下のような質問をする

Yes なら $A < B$ と、No なら $A > B$ と分かる

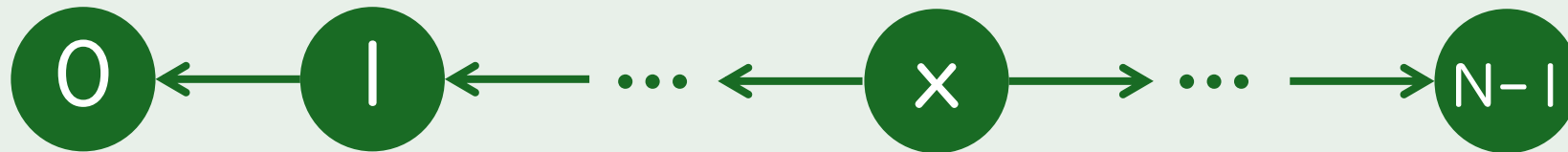
残りは A, B の値を
二分探索で求めよう!

$A < B$ かどうか判別できる!

小課題 1: パスグラフ

ここでは $A < B$ の場合を考える

“ A が x 以上か?” の判定は以下のようにできる!

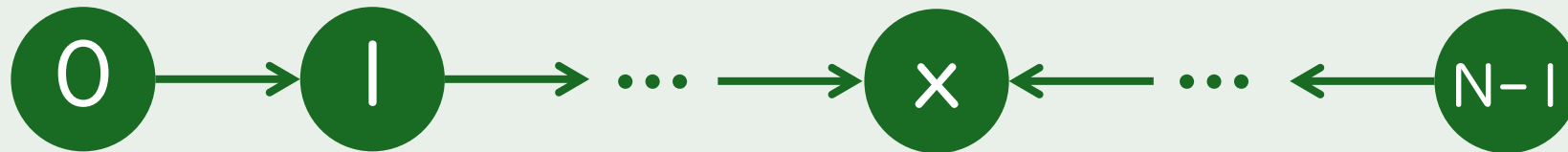


Yes なら $A \geq x$ で、No なら $A < x$

小課題 1: パスグラフ

ここでは $A < B$ の場合を考える

“B が x 以下か?” の判定も以下のようにできる!



Yes なら $B \leq x$ で、No なら $B > x$

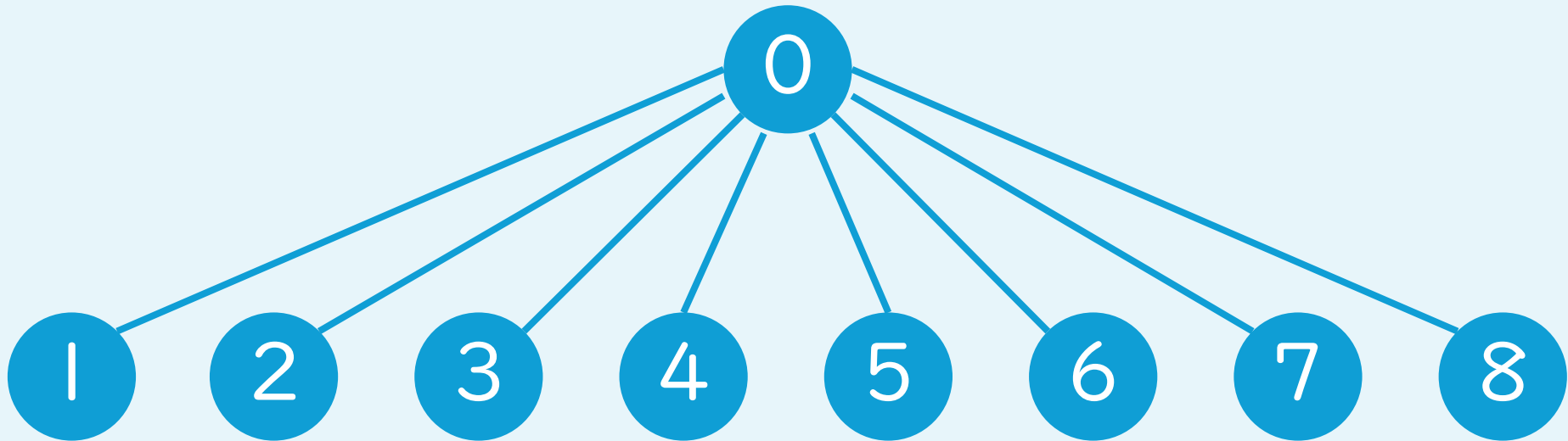
小課題 1: パスグラフ

まとめると... $2 \log N + 1 = 29$ 回の質問で解ける!

- 1 $A < B$ かどうか判定する (1 クエリ)
- 2 A を二分探索で求める ($\log N$ クエリ)
- 3 B を二分探索で求める ($\log N$ クエリ)

小課題 2: スターグラフ

木がスターグラフの場合を解きたい

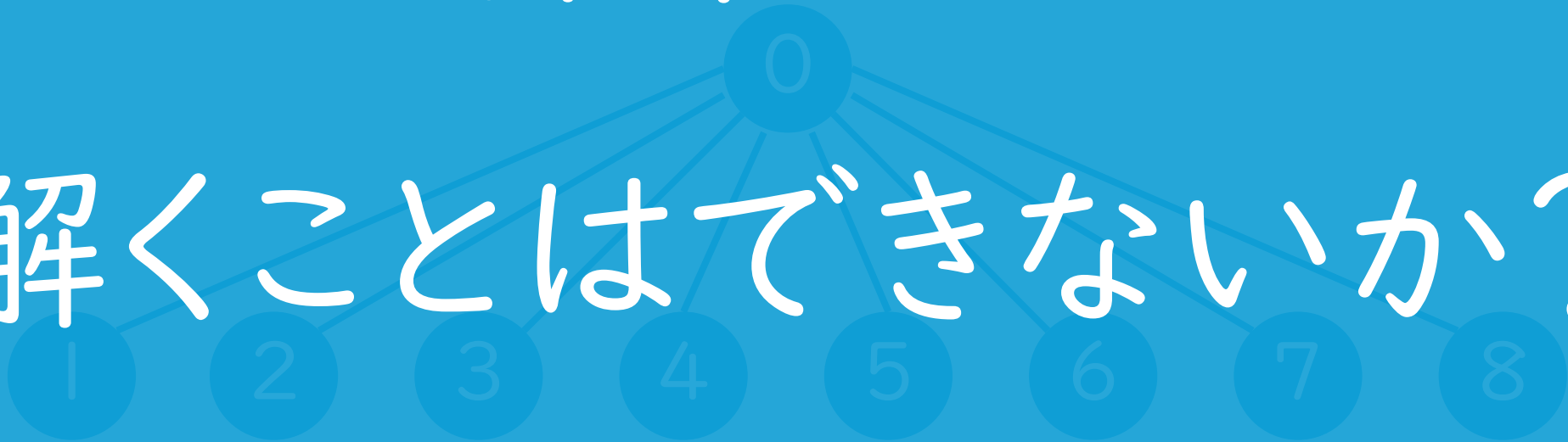


小課題 2: スターグラフ

木がスターグラフの場合を解きたい

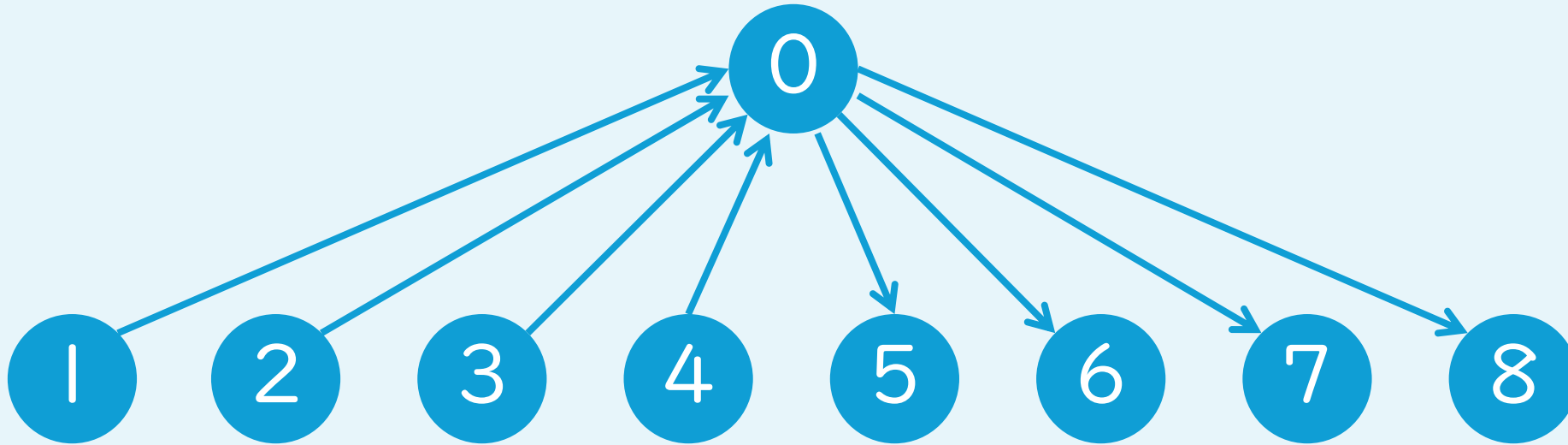
二分探索みたいに

解くことはできないか？



小課題 2: スターグラフ

とりあえず 1-4 で「0 に入る辺」、5-8 で「0 から出る辺」にする



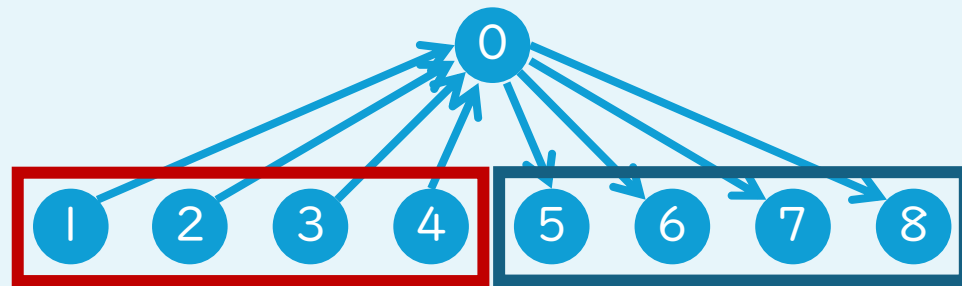
Yes なら「A が 1-4 かつ B が 5-8」が分かる

※ ただし A, B のどちらかが 0 になるケースは除く

小課題 2: スターグラフ

もし Yes であれば?

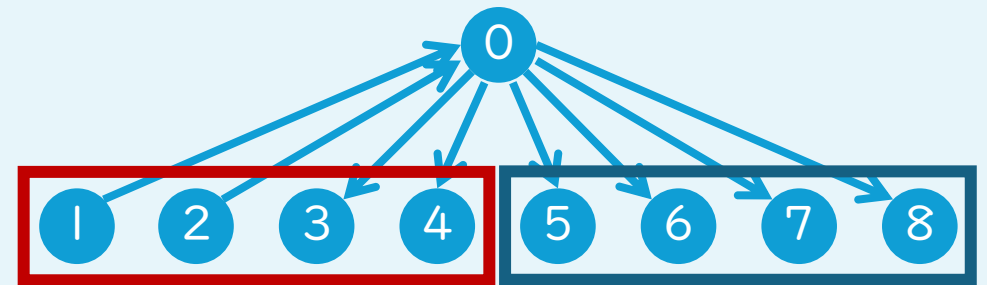
→ 以下のようにして、A (および B) を二分探索で求められる!



A がこの範囲

B がこの範囲

Yes

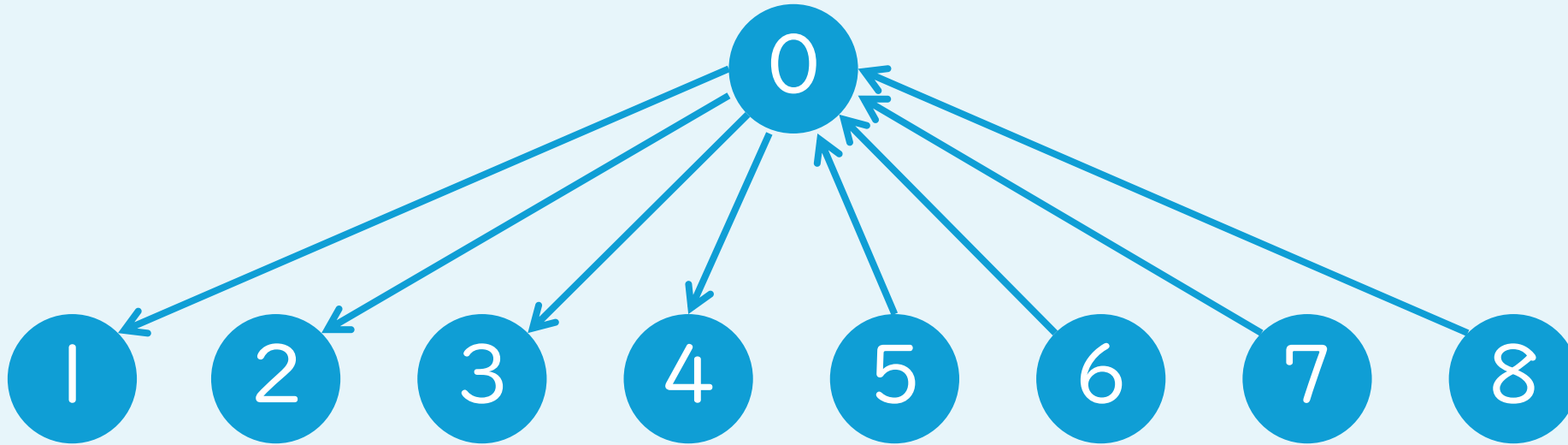


3, 4 の辺を逆転させる

$A \leq 2$ ならば Yes

小課題 2: スターグラフ

今度は逆に 5-8 で「0 に入る辺」、1-4 で「0 から出る辺」にする



これで Yes の場合も先ほどと同様に二分探索で (A, B) が求まる

※ ただし A, B のどちらかが 0 になるケースは除く

小課題 2: スターグラフ

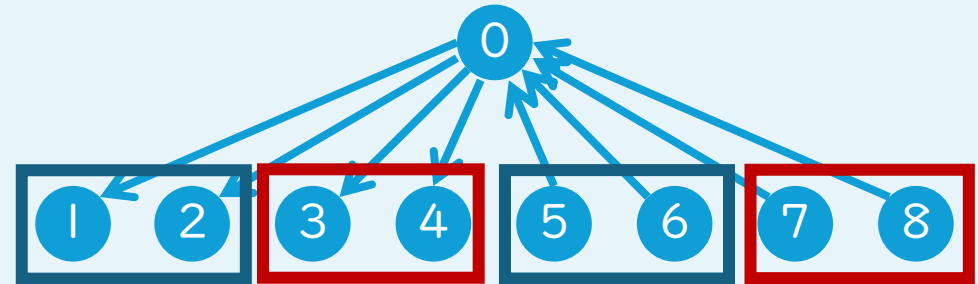
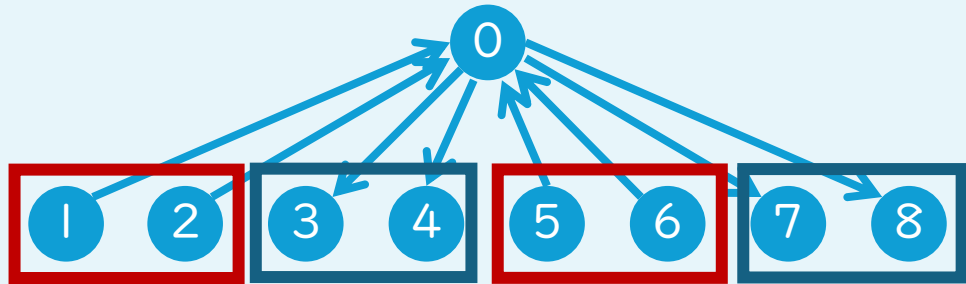
では、どちらも No の場合はどうなるか？



A, B が同じグループ (1-4 or 5-8) に入ってることが分かる

小課題 2: スターグラフ

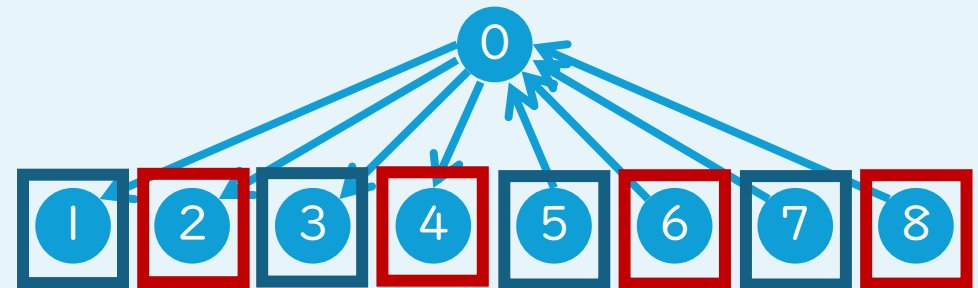
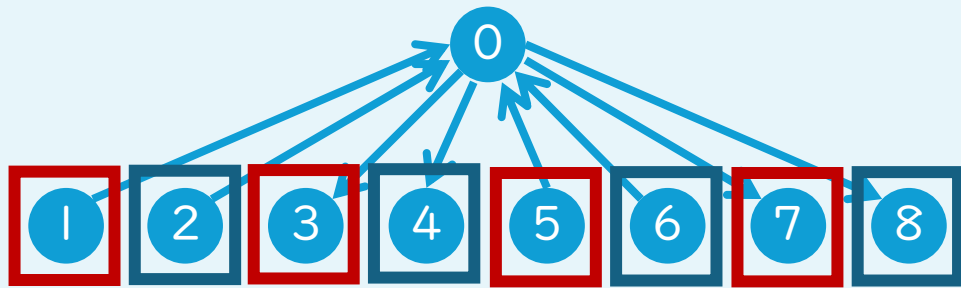
今度は各グループを 2 つに分ける



片方 Yes の場合 → 先ほどと同様に二分探索で (A, B) が求まる
両方 No の場合 → A, B が同じグループ (1-2, 3-4, 5-6, 7-8)

小課題 2: スターグラフ

今度は各グループをさらに 2 つに分ける



片方 Yes の場合 → 先ほどと同様に二分探索で (A, B) が求まる

両方 No の場合 → **$A \neq B$ なのであり得ない!**

小課題 2: スターグラフ

今度は各グループをさらに2つに分ける
グループ分けに $2 \log N$ 回

二分探索に $2 \log N$ 回

→ 合計 $4 \log N$ 回の質問で十分!

片方 Yes の場合 → 先ほどと同様に二分探索で (A, B) が求まる

両方 No の場合 → $A \neq B$ なのであり得ない!

一般の木を解くにあたって

小課題 1, 2 の解法を振り返ると...

全部同じ向きにして
 $A < B$ か判定



A, B をそれぞれ
二分探索で求める

小課題 1: パスグラフ

グループを 2 倍ずつに
分けていく



A, B をそれぞれ
二分探索で求める

小課題 2: スターグラフ

一般の木を解くにあたって

解法の共通部分①: 最後は A, B を二分探索で求める

全部同じ向きにして
 $A < B$ か判定



A, B をそれぞれ
二分探索で求める

小課題 1: パスグラフ

グループを 2 倍ずつに
分けていく



A, B をそれぞれ
二分探索で求める

小課題 2: スターグラフ

一般の木を解くにあたって

解法の共通部分②: 何らかの方法で質問に“Yes”と答えさせる

小課題 1 では「全部同じ向き」「全部逆向き」の 2 パターン試して“Yes”を得る

全部同じ向きにして
 $A < B$ か判定



A, B をそれぞれ
二分探索で求める

小課題 1: パスグラフ

グループを 2 倍ずつに
分けていく



A, B をそれぞれ
二分探索で求める

小課題 2: スターグラフ

A, B を二分探索で求める

まずは "Yes" が返ってきた後に A, B を求める方法を説明します

全部同じ向きにして
 $A < B$ か判定



A, B をそれぞれ
二分探索で求める

小課題 1: パスグラフ

グループを 2 倍ずつに
分けていく

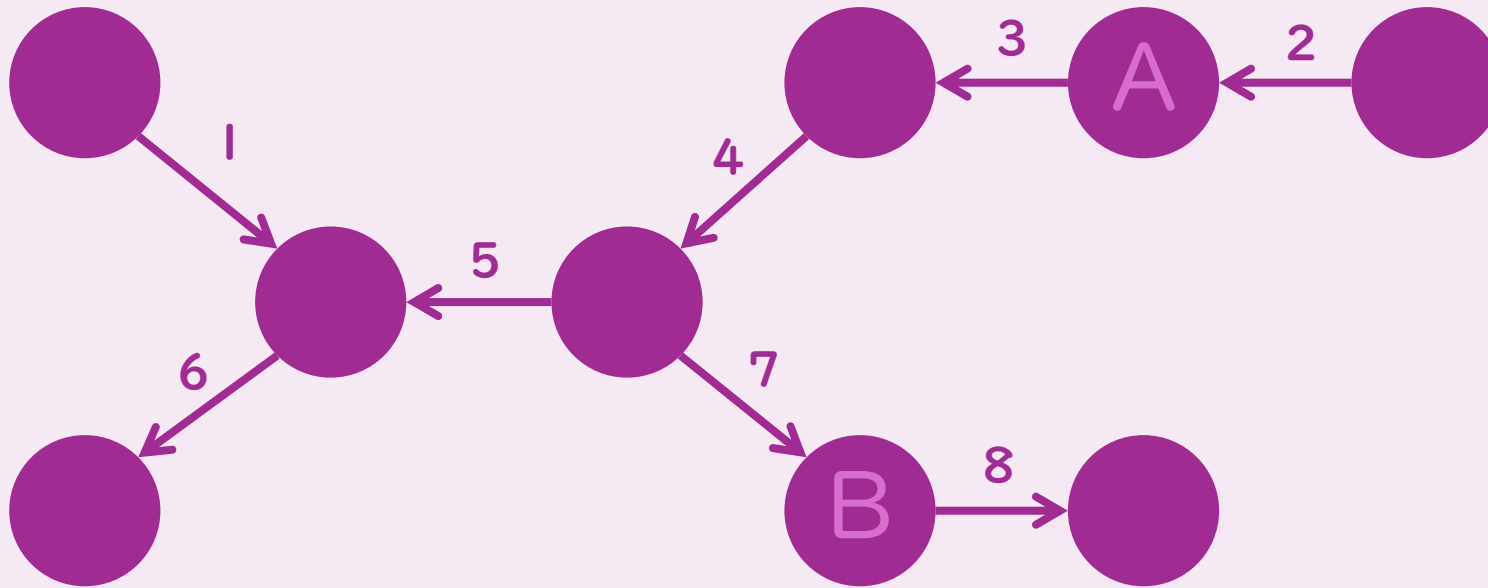


A, B をそれぞれ
二分探索で求める

小課題 2: スターグラフ

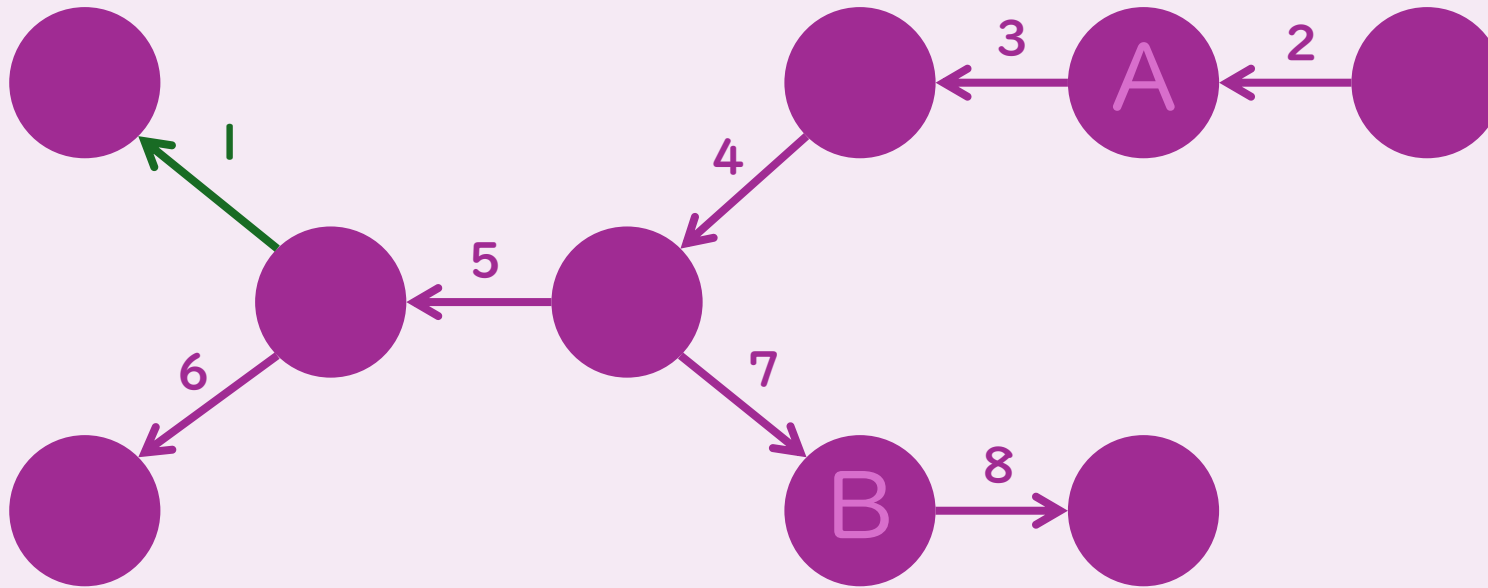
A, B を二分探索で求める

ある辺の向き付けで “Yes” が返ってきたとする



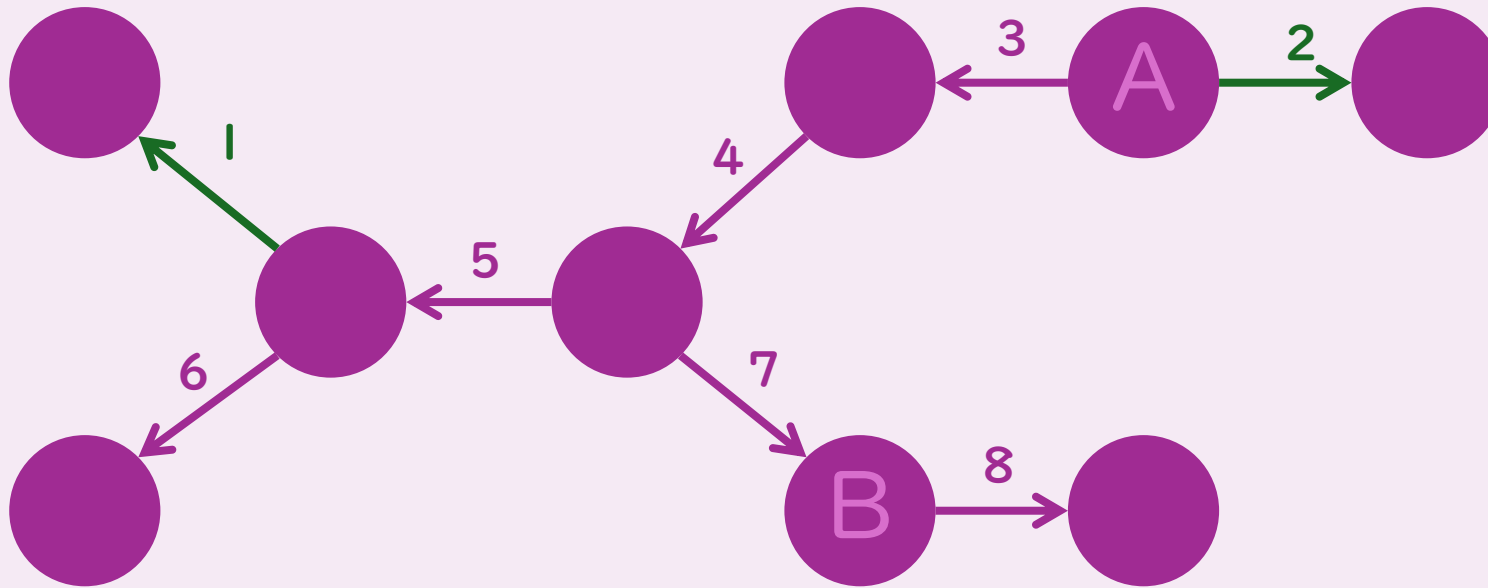
A, B を二分探索で求める

ひとつずつ反転させていくことを考える



A, B を二分探索で求める

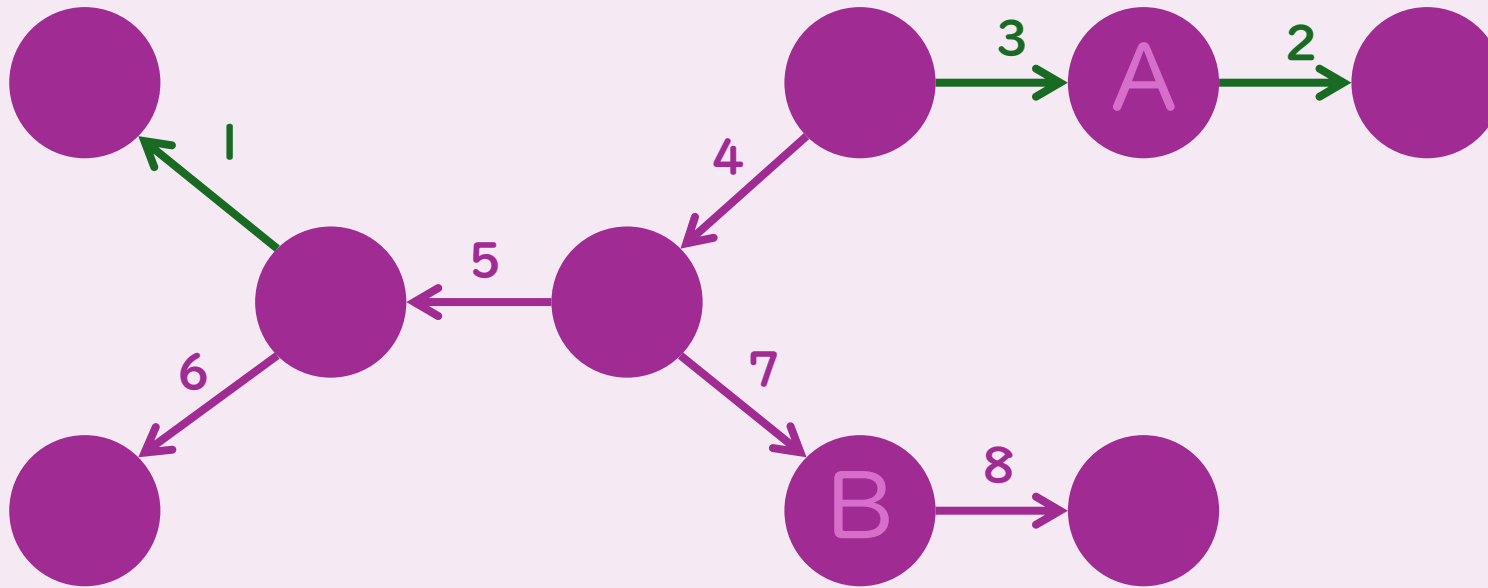
ひとつずつ反転させていくことを考える



A, B を二分探索で求める

どこかのタイミングで $A \rightarrow B$ に到達できなく (“No” に) なる!

番号 3, 4, 7, 8 の辺のいずれかが反転されれば “No”



A, B を二分探索で求める

どこかのタイミングで $A \rightarrow B$ に到達できなく (“No” に) なる!

番号 3, 4, 7, 8 の辺のいずれかが反転すれば “No”
“Yes” が “No” になる境界は

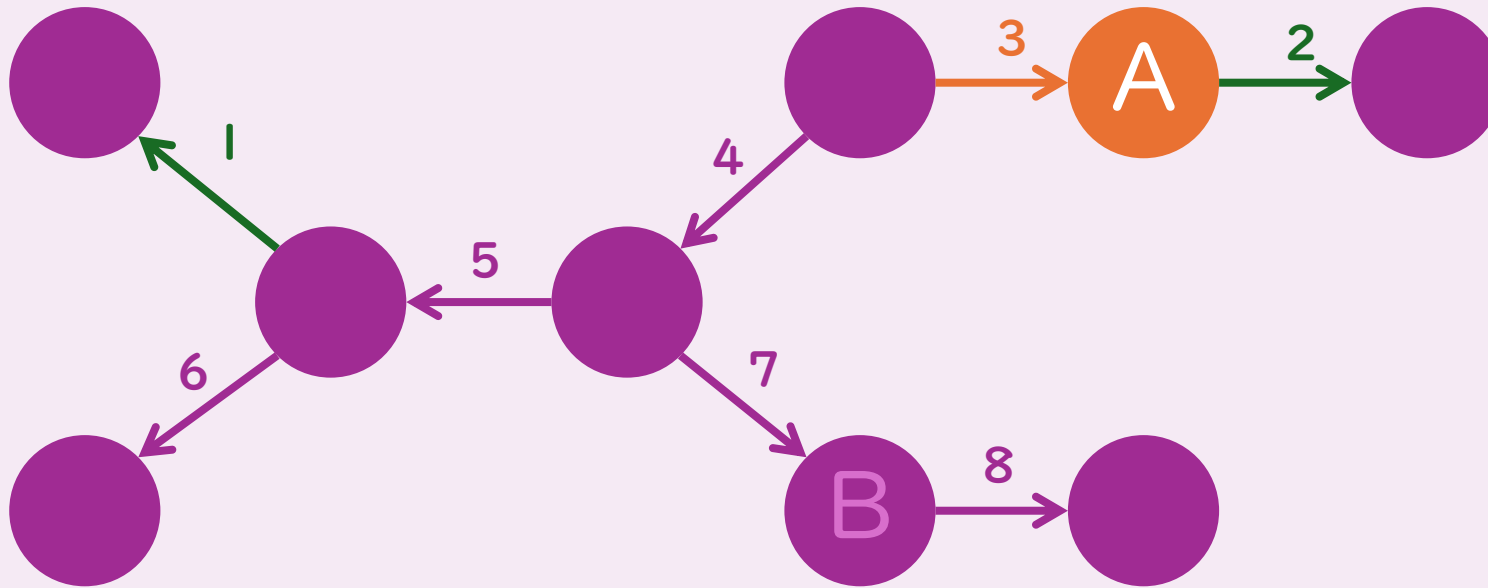
二分探索で求まる!



A, B を二分探索で求める

特に、辺の番号をトポロジカル順でソートされている場合…

※ トポロジカル順: 辺の流れの順番で番号が並んでいること



「境界の辺」の端点が A となる！

A, B を二分探索で求める

こうして A, B が二分探索で求まる

※ トポロジカル順: 辺の流れの順番で番号が並んでいること

つまり ”Yes” の返答から

$2 \log N$ 回の質問で解ける!

「境界の辺」の端点が A となる!

Yes の返答を一度得る

次に、一度でも“Yes”の返答を得る方法を考える

全部同じ向きにして
 $A < B$ か判定



A, B をそれぞれ
二分探索で求める

小課題 1: パスグラフ

グループを 2 倍ずつに
分けていく

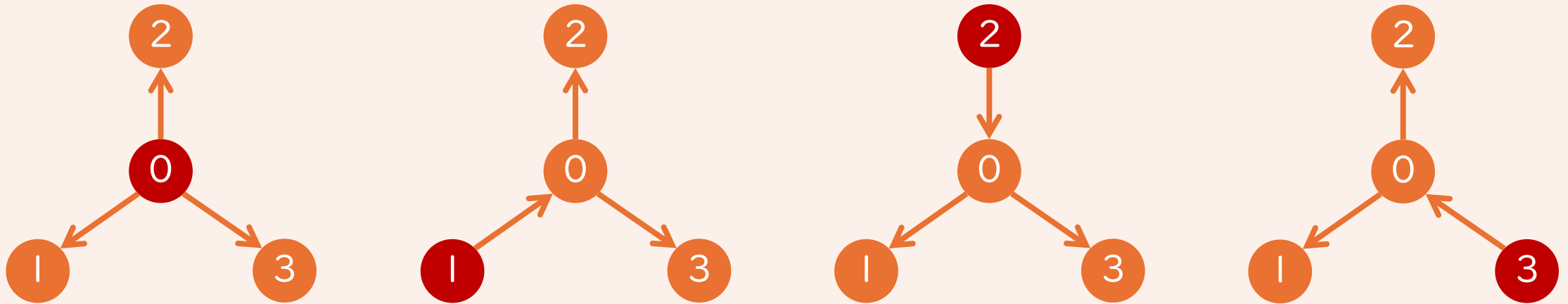


A, B をそれぞれ
二分探索で求める

小課題 2: スターグラフ

Yes の返答を一度得る

各頂点 v を根としてそこから広がるように辺を向き付けると、必ずいずれかで “Yes” になる (例えば $v = A$ の場合)



→ $N + 2 \log N$ 回の質問で解ける! (小課題 5 に正解)

小課題 5: $N \leq 250$

各頂点 v を根としてそこから広がるように辺を向き付けると、必ずいずれかで “Yes” になる (例えば $v = A$ の場合)



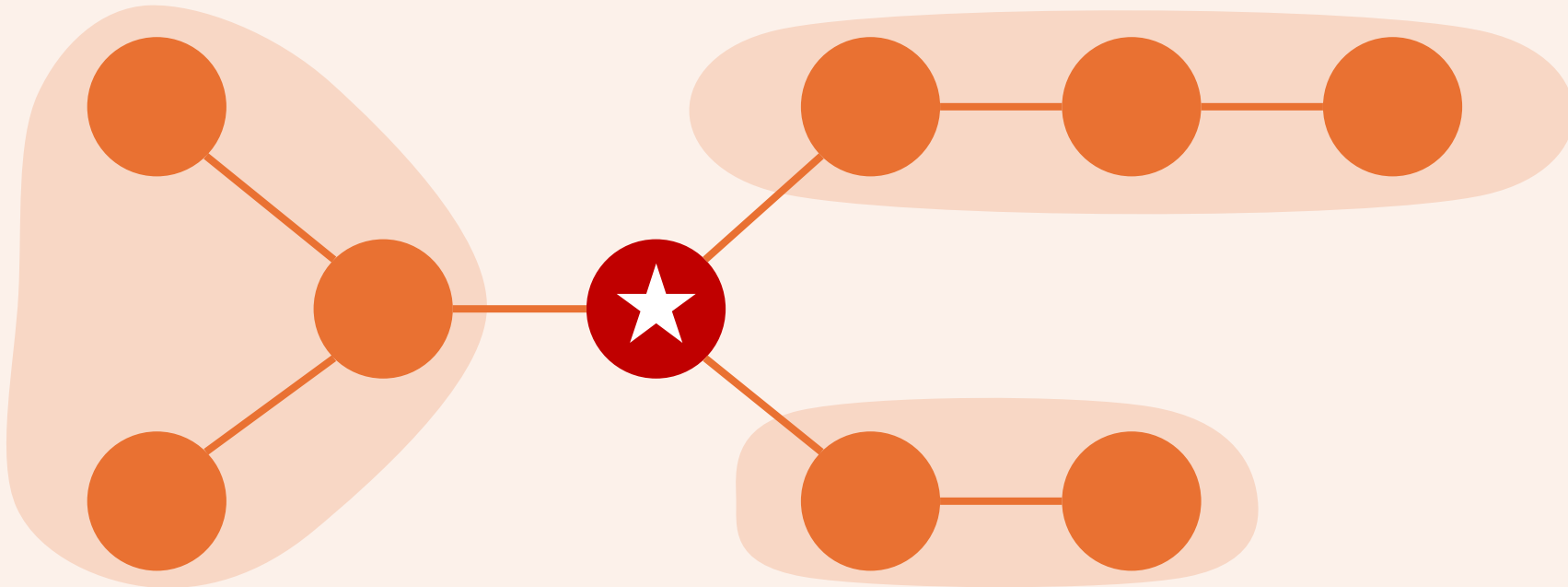
効率化しよう!

→ $N + 2 \log N$ 回の質問で解ける!

木の重心

木には **重心 (centroid)** とよばれる頂点が存在する

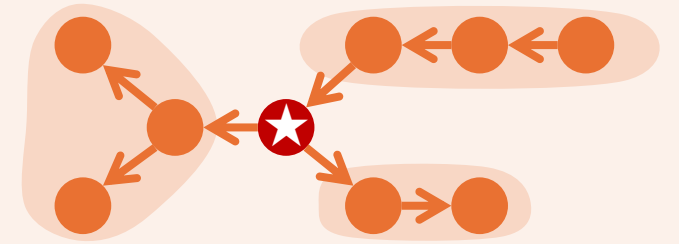
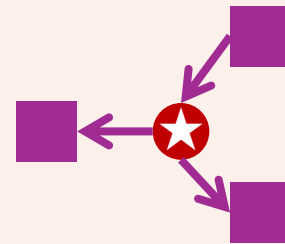
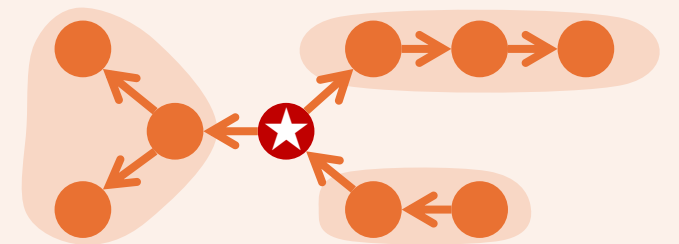
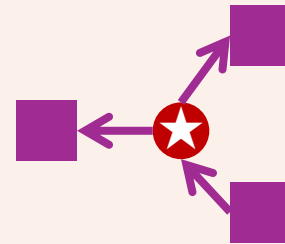
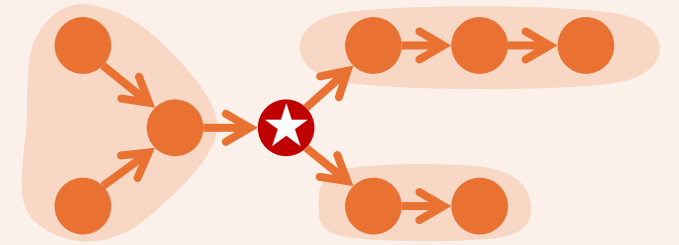
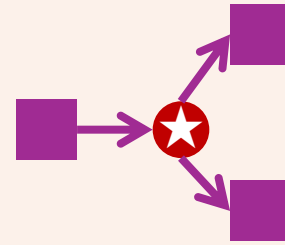
- この頂点を削除すると、各連結成分が $N/2$ 頂点以下になるもの



木の重心で分ける

木の重心を中心としたスターグラフ
だと思って問題を解く

→ もし No しか得られなかった場
合 A, B は同じ“連結成分”

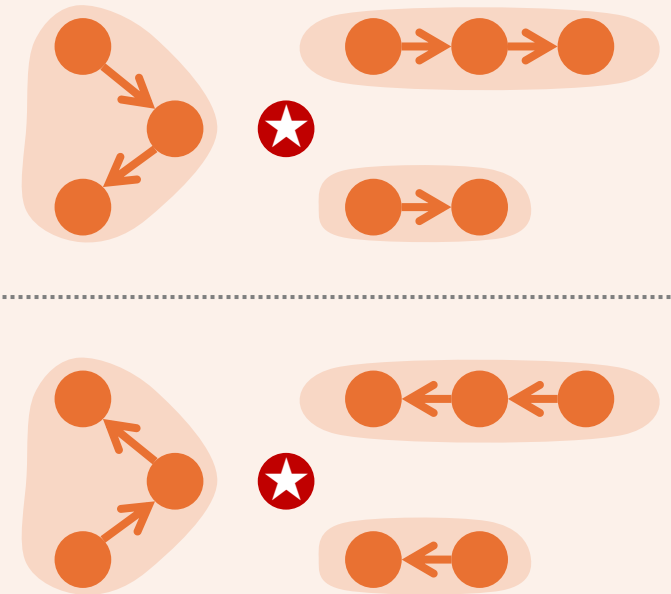


木の重心で分ける

木の重心を中心としたスターグラフ
だと思って問題を解く

→ もし No しか得られなかった場
合 A, B は同じ“連結成分”

アイデア: このとき各連結成分に対して同じ問題を並列に解く!

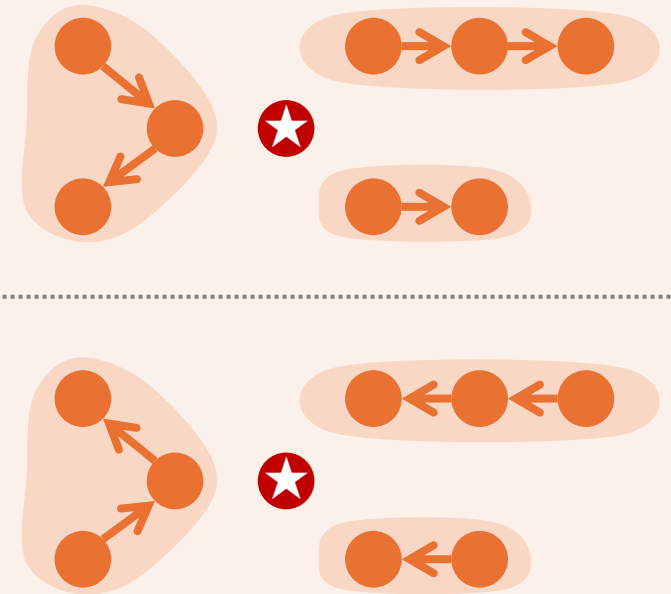


木の重心で分ける

アイデア: このとき各連結成分に対して同じ問題を並列に解く!

計算量解析

- 連結成分のサイズは毎回半分以下になるので $\log N$ ステップしか起こらない
- スターグラフを解くのに $2 \log N$ 回質問
→ $2 \log N + 2 \log(N/2) + \dots = \log^2 N$ 回程度の質問で “Yes” が得られ、小課題 7 で 16/32 点獲得



木の重心で分ける

アイデア: このとき各連結成分に対して同じ問題を並列に解く!

改善点: 定数回の質問で

計算量解析

- 連結成分のサイズは毎回半分以下になるので $\log$

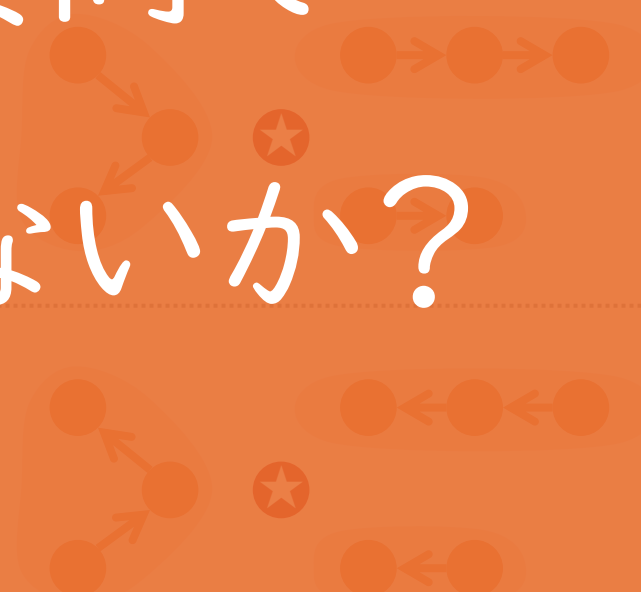
N 回しかかからない

頂点数を半分にできないか?

- スターグラフを解くのに $2 \log N$ 回質問

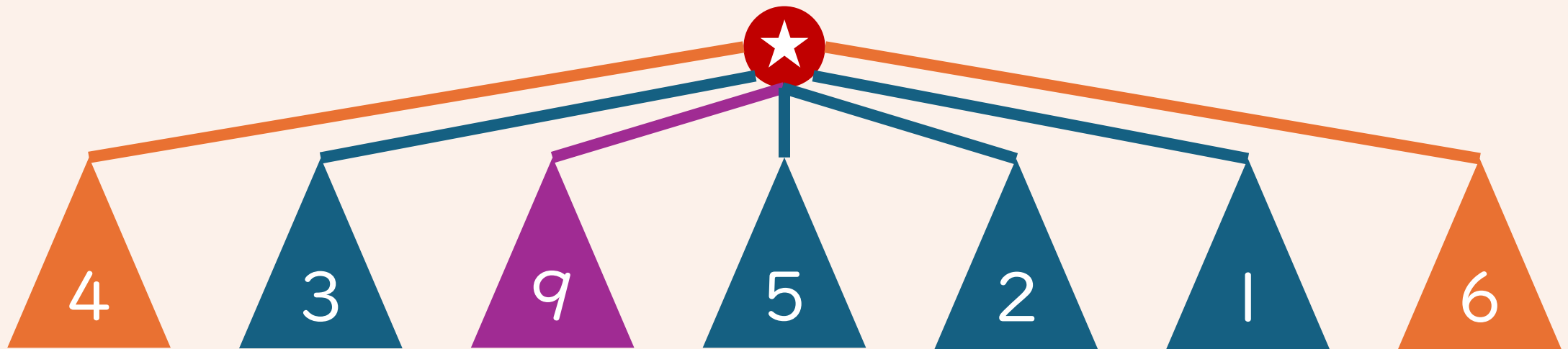
→ $2 \log N + 2 \log(N/2) + \dots = \log^2 N$ 回程度の

質問で “Yes” が得られ、小課題 7 で 16/32 点獲得



“3 分割定理”の利用

アイデアは、重心でたくさんの連結成分ができた場合、全部別々のグループとは考えずに適切にまとめることである



この例では 3 グループに分けるだけで、各グループの頂点数を元の半分以下にしている（数字は連結成分のサイズ）

“3 分割定理”の利用

Q. こんなことは常に可能なのか？

定理

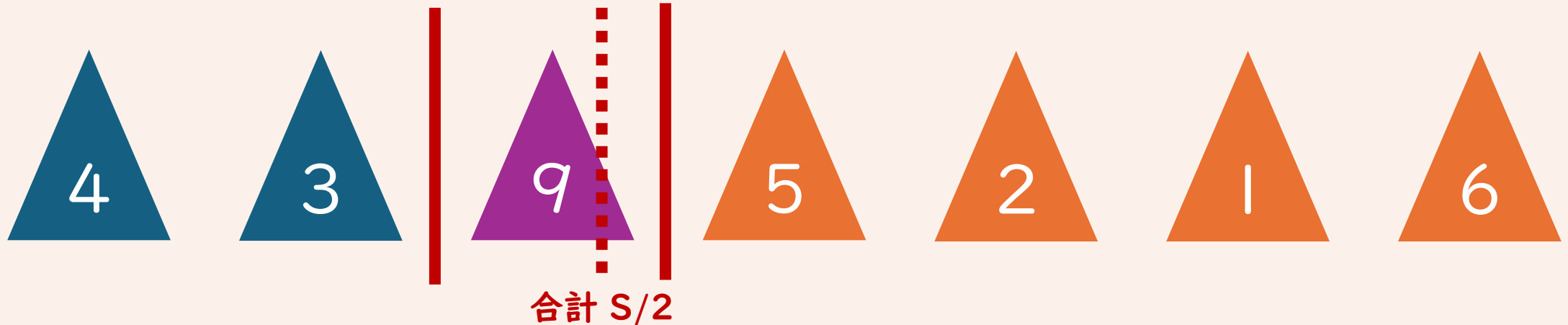
自然数 $a_1, \dots, a_n$ が $\max(a_1, \dots, a_n) \leq S/2$ を満たすとき、どのグループの総和も $S/2$ 以下になるようにこれらを 3 分割することが可能である。ここで $S = a_1 + \dots + a_n$ とする。

“3 分割定理”の利用

“3 分割定理”の証明

左からの合計が $S/2$ になる直前と直後で分割すれば OK

→ 1, 3 番目はもちろん $S/2$ 以下、2 番目も 1 つの要素なので $S/2$ 以下



“3分割定理”の利用

“3分割定理”の証明
3回の質問で頂点数を半分に!

左からの合計が $S/2$ になる直前と直後で分割すれば OK

質問回数は $3 \log N + 2 \log N$ 回

→ 小課題 7 で満点獲得!



そして、一般グラフへ

実は一般グラフでも、同じように解くことができる

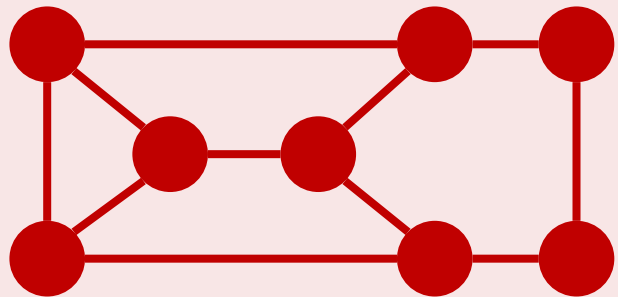
- 1 一度でも “Yes” の返答を得る
- 2 最後は A, B を二分探索で求める

そして、一般グラフへ

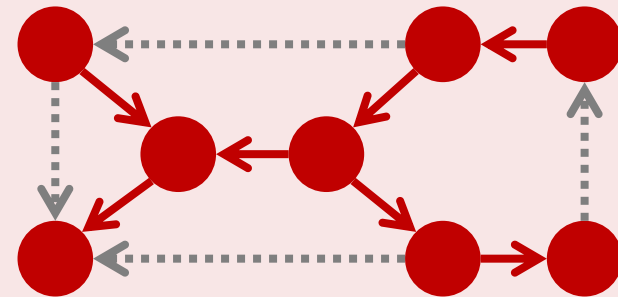
I 一度でも“Yes”の返答を得る

一般グラフで“Yes”を得るのは木の場合より簡単

- 全域木は「木の場合」と同様にして、それ以外の辺は適当でいい



全域木のみ考える



そして、一般グラフへ

2 最後は A, B を二分探索で求める

もし辺の向き付けが **DAG (閉路のないグラフ)** になっていれば、木の場合と同様に “Yes” から $2 \log N$ 回の質問で A, B が求まる

注意点

- ① 全域木に含まれない辺は DAG になるように向き付ける
- ② 辺ではなく頂点のトポロジカル順を使って二分探索する

そして、一般グラフへ

2 最後は A, B を二分探索で求める

一般グラフでも $5 \log N$ 回を実現

もし辺の向き付けが DAG (閉路のないグラフ) になっていれば、木の場合と同様に “Yes” から $2 \log N$ 回の質問で A, B が求まる
→ 小課題 8 で満点獲得!

注意点

- ① 全域木に含まれない辺は DAG になるように向き付ける
- ② 辺ではなく頂点のトポロジカル順を使って二分探索する