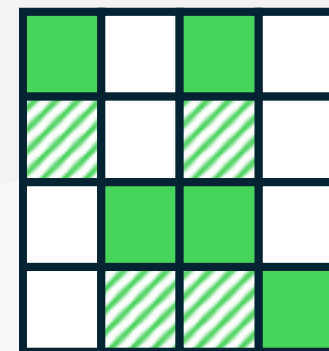
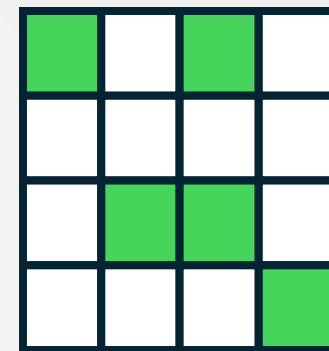


日本浮上 (Japan Emerges)

解説: 増田拓真

問題概要

- 南北 H 行、東西 W 列のマス目がある
- 最初、 $(R_1, C_1), \dots, (R_N, C_N)$ のマス目が陸で、それ以外は海
- 毎日、1つ北が陸の海のマスが全て新しく陸となる
 - つまり陸が南に1マス分広がる
- 陸が全て連結になるまで何日かかる？
- $H, W, N \leq 2 \times 10^5$

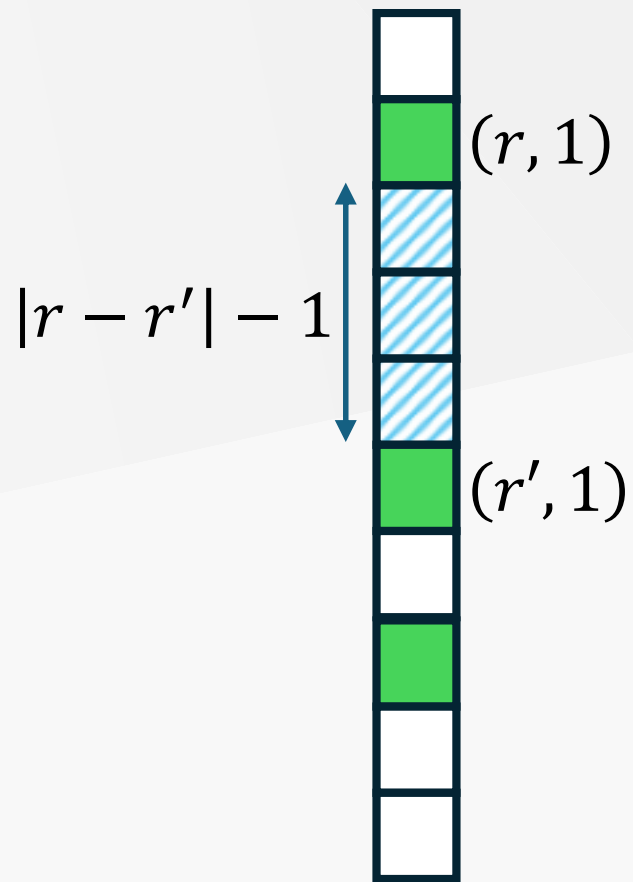


小課題

1. (5 点) $W = 1$
2. (9 点) $N = 2$
3. (8 点) $H, W, N \leq 500$
4. (28 点) $N \leq 2000$
5. (13 点) $H \times W \leq 2 \times 10^5$
6. (13 点) $H \times N \leq 2 \times 10^5$
7. (24 点) 追加の制約はない

小課題 1 ($W = 1$)

- $W = 1$ なので、各マスは縦一列に並んでいる
- 陸の合体は縦につながるパターンのみ
- 陸 $(r, 1), (r', 1)$ が合体するのは $|r - r'| - 1$ 日後
- 陸を R でソートして、 $\max_i (|R_{i+1} - R_i| - 1)$ が答え



小課題 2 ($N = 2$)

陸 $(r, c), (r', c')$ の配置は以下の 3 通り

1. $c = c'$

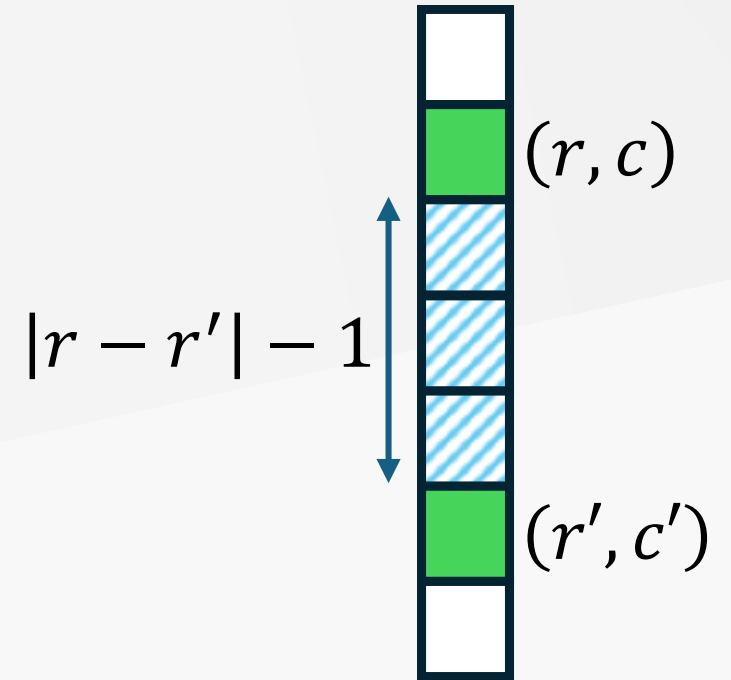
2. $|c - c'| = 1$

3. $|c - c'| \geq 2$

小課題 2 ($N = 2$)

1. $c = c'$ の場合

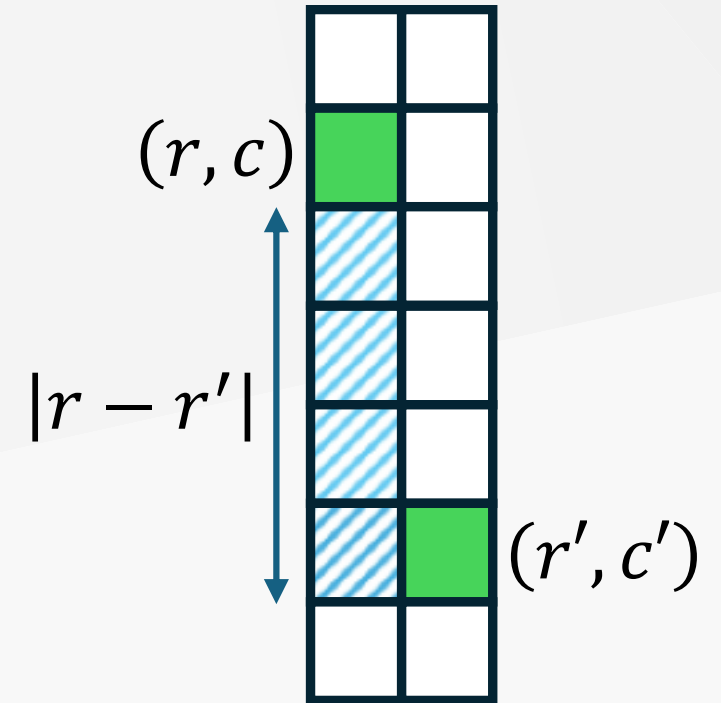
- 小課題 1 と同様、縦に合体
- 答えは $|r - r'| - 1$



小課題 2 ($N = 2$)

2. $|c - c'| = 1$ の場合

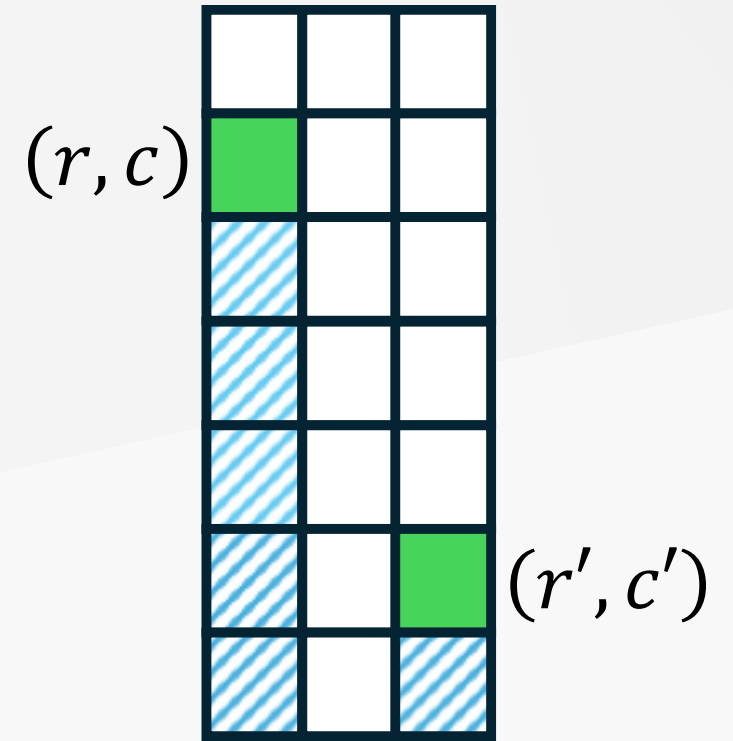
- 合体はするものの、横に繋がる
- 答えは $|r - r'|$



小課題 2 ($N = 2$)

3. $|c - c'| \geq 2$ の場合

- 合体しない
- 答えは -1



小課題 2 ($N = 2$)

まとめると

1. $c = c'$ の場合: $|r - r'| - 1$
2. $|c - c'| = 1$ の場合: $|r - r'|$
3. $|c - c'| \geq 2$ の場合: -1

小課題 3 ($H, W, N \leq 500$)

- 高さ H マスより、 $H - 1$ 日で最終的に陸になる海は全て陸になる
- よって地殻変動は高々 $H - 1$ 日で終わる
- 大きさ $H \times W$ の配列を用いてマス目のシミュレーションをし、陸が連結か DFS などで毎日判定
- 一日あたりの計算量が $O(HW)$ なので、全体で $O(H^2W)$

小課題 5 ($H \times W \leq 2 \times 10^5$)

小課題 3 を高速化すると小課題 5 が解ける

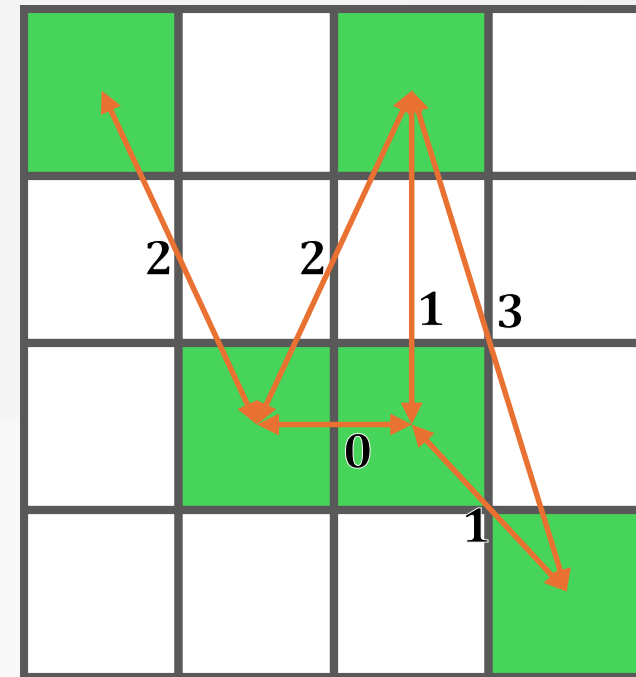
- シミュレーション
 - t 日目に陸が生まれるのは、 $t - 1$ 日目に新しく生まれた陸の南
 - 生まれる陸の個数の総和は $H \times W$ 以下なので計算量は $O(HW)$
- 連結判定
 - 連結判定は Union-Find など高速に行える
 - アッカーマン関数の逆関数 $\alpha(n)$ を用いて $O(HW\alpha(HW))$

よって全体で計算量 $O(HW\alpha(HW))$ で解ける

小課題 4 ($N \leq 2000$)

小課題 4 に戻る

- 地殻変動でできた陸は必ずある (R_i, C_i) と連結なため、 $(R_i, C_i), (R_j, C_j)$ ($1 \leq i < j \leq N$) 間の連結性のみを考えれば良い
- 一方、小課題 2 の考察から、 (R_i, C_i) と (R_j, C_j) のマスが合体するまでの日数がわかる

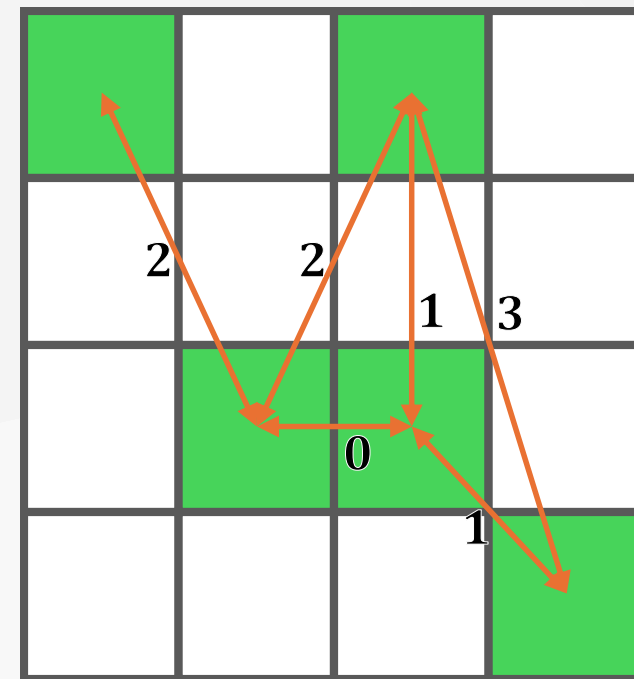


小課題 4 ($N \leq 2000$)

従って次のように N 点の連結性を Union-Find を用いて $H - 1$ 日間管理すれば良い

1. 組 (i, j) について、 (R_i, C_i) と (R_j, C_j) が合体までの日数を計算する
2. t 日目に「合体するまでの日数」が t の組 (i, j) 全てで $i - j$ 間に辺を追加する
3. N 点が連結になったときの日数が答え

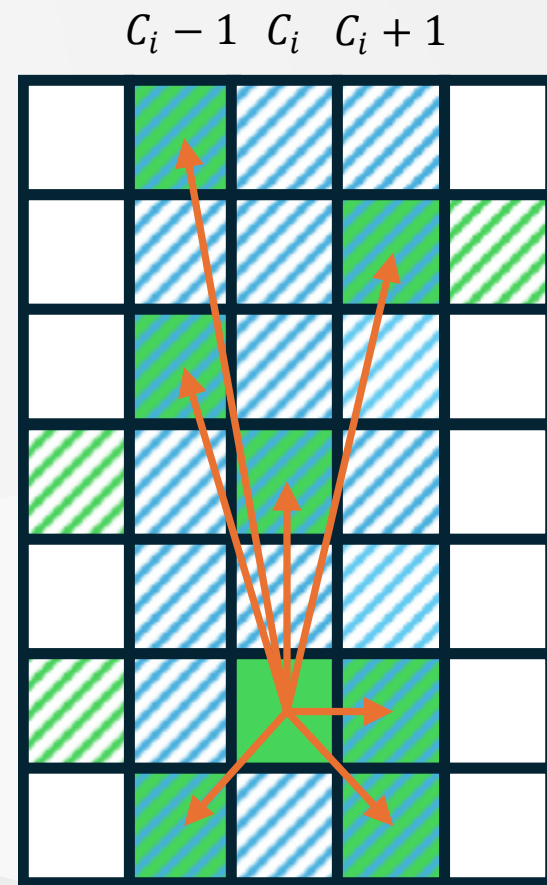
計算量は全体で $O(H + N^2\alpha(N))$



小課題 6 ($H \times N \leq 2 \times 10^5$)

小課題 4 の高速化を考える

- ボトルネックとなっているのは組 (i, j) を全列挙して計算する部分
- 小課題 2 を思い出すと、 $|C_i - C_j| \geq 2$ の組は無視できる
- i を固定して、 $C_j = C_i - 1, C_i, C_i + 1$ となる j のみ考える

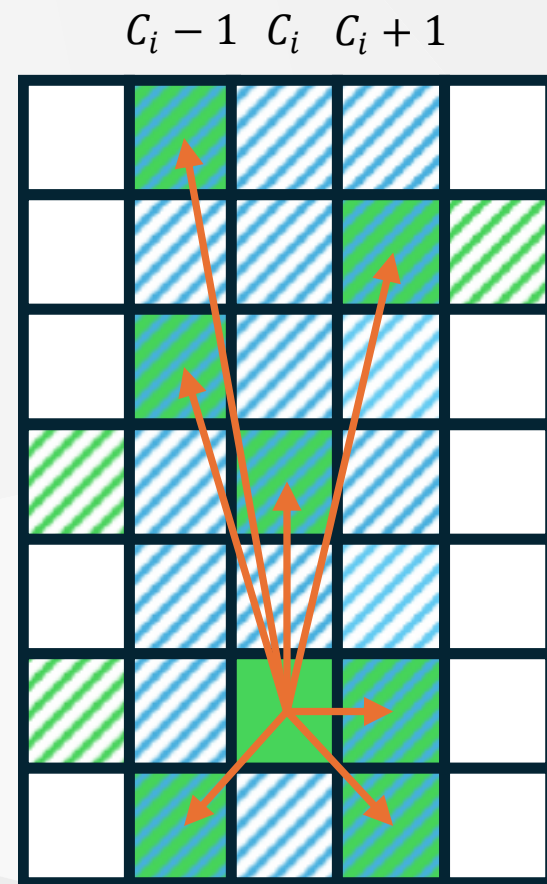


小課題 6 ($H \times N \leq 2 \times 10^5$)

- 先に j を C_j ごとにまとめておくと、高々 $3H$ 個の j を考えるだけで済む
- 全体で考えるべき組 (i, j) の個数は $O(HN)$ 個となる

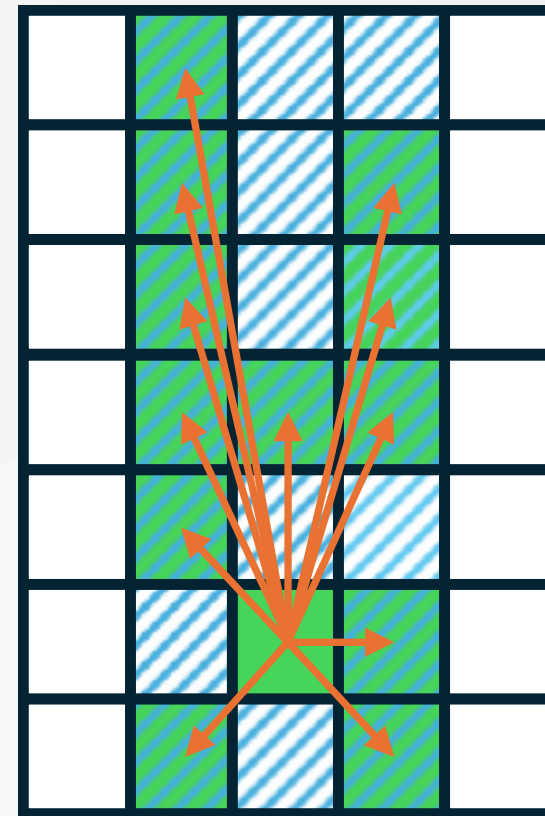
小課題 4 の解法に適用すると、計算量は全体で $O(H + W + HN\alpha(N))$

(小課題 5 と座標圧縮を合わせる方針もある)



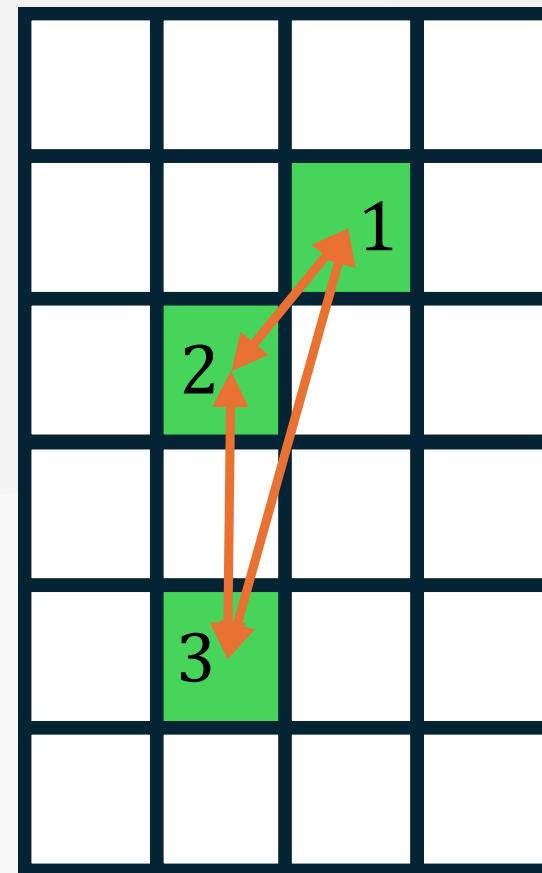
小課題 7 (満点)

- 小課題 6 の解法では必要な組が多すぎる
- 実は連結性に寄与する組はもっと少ない



小課題 7 (満点)

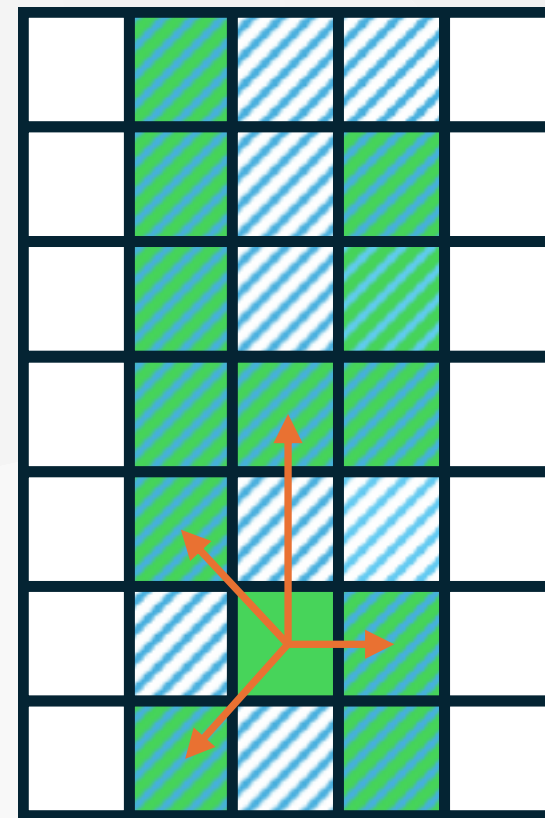
- 図のような例を考える
- $(1, 2)$ は 1 日、 $(2, 3)$ も 1 日、 $(1, 3)$ は 3 日で合体する
- このとき $(1, 3)$ は 1 日目に $(1, 2)$ 、 $(2, 3)$ で間接的に連結になるため答えに寄与しない
- つまり直接合体する組以外は無視して良い



小課題 7 (満点)

i と直接合体する j は以下の 4 通り

1. $C_i = C_j$ のとき
 - a. $R_j > R_i$ となる中で R_j が最小のもの
 - b. $R_j < R_i$ となる中で R_j が最大のもの
2. $|C_i - C_j| = 1$ のとき
 - a. $R_j \geq R_i$ となる中で R_j が最小のもの
 - b. $R_j \leq R_i$ となる中で R_j が最大のもの



予め R_j でソートしておけば、二分探索などで j を求めることができる

小課題 7 (満点)

- i を固定したとき j は高々 6 通りなので、全体でも (i, j) は $O(N)$ 個
- 以上の方法と小課題 6 の解法を組み合わせると、全体で $O(H + W + N \log N)$ で解ける