

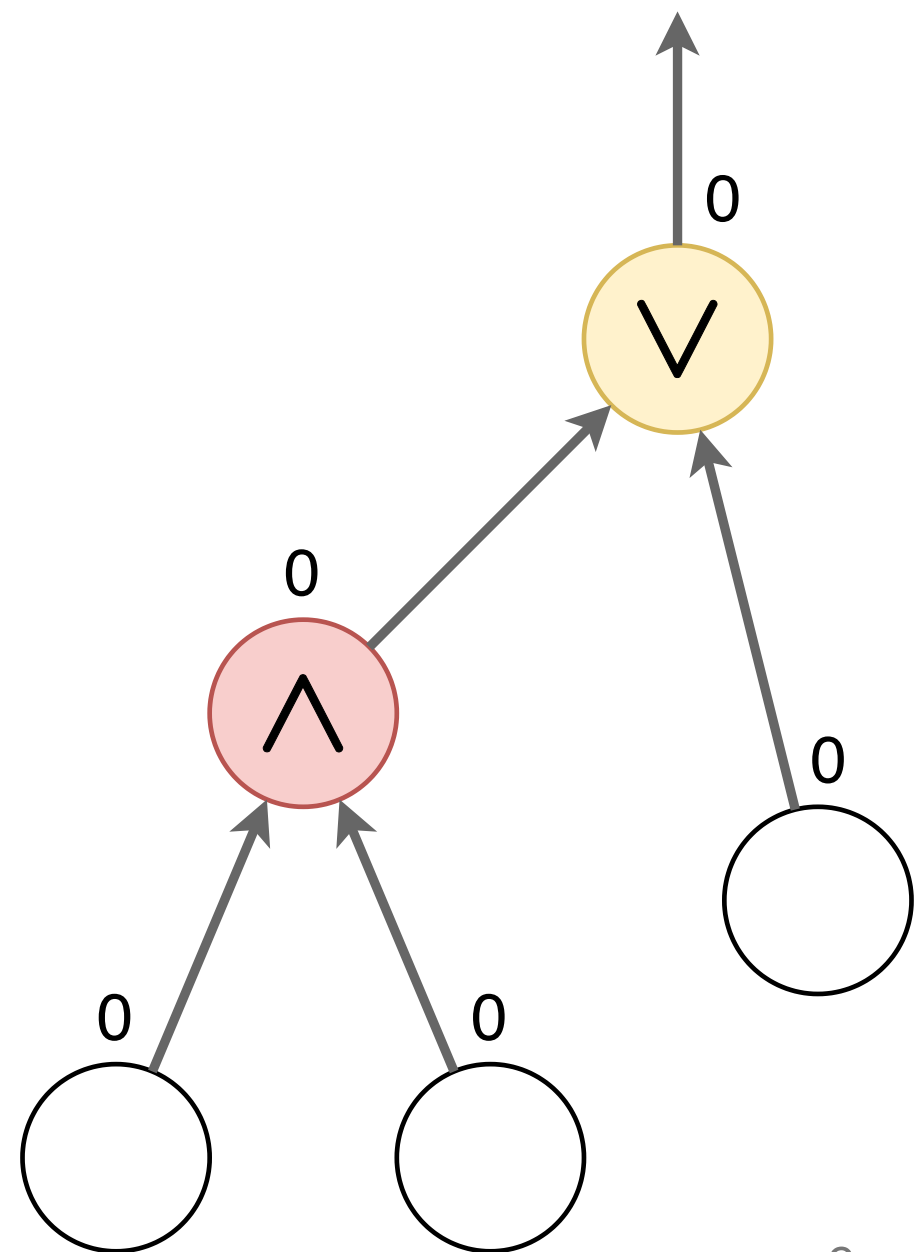
JOI/JOIG 2024/2025 春季トレーニング

Day 4 – 電子回路 2 (Circuit 2) 解説

解説担当: 山縣 龍人 (tatyam)

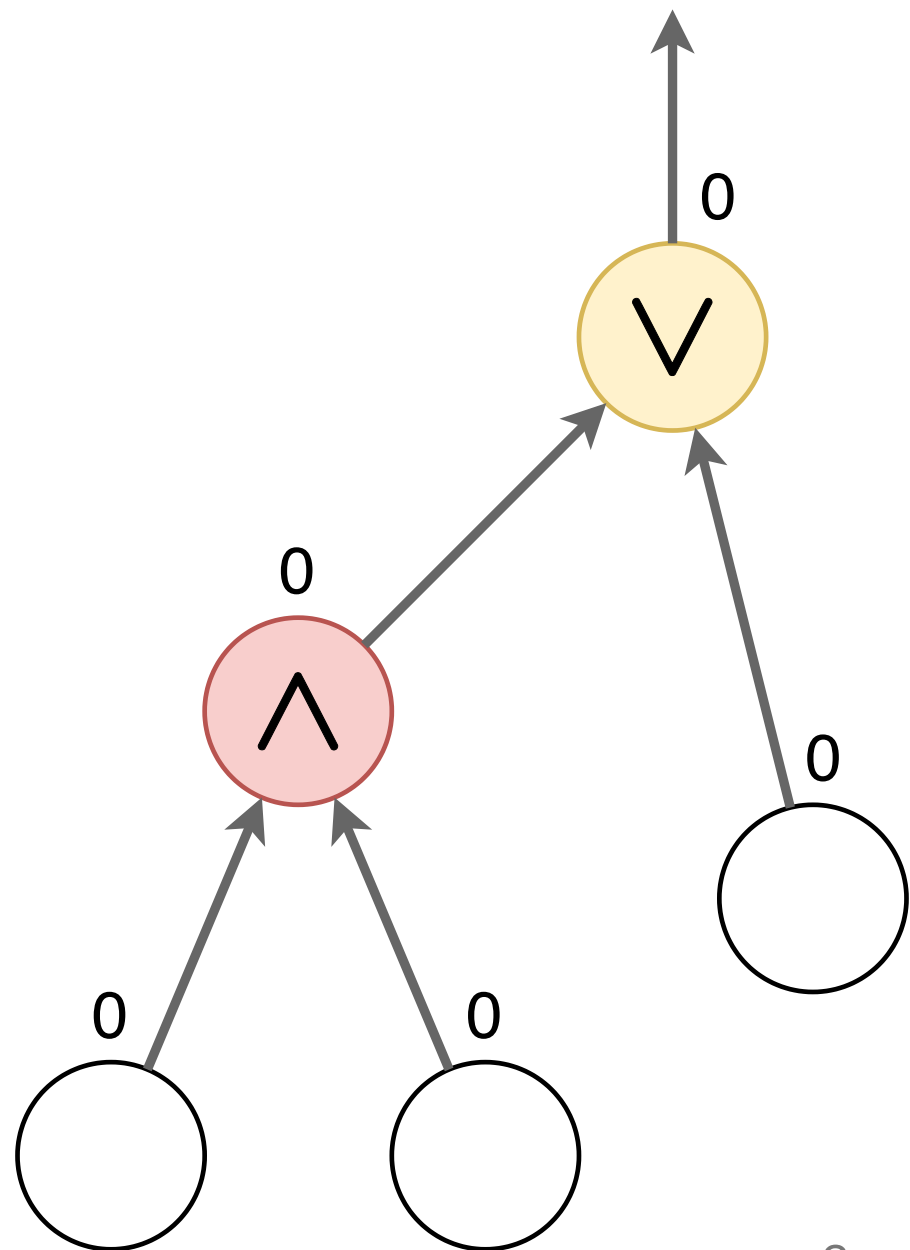
問題概要

- $N + 1$ 個の葉からなる根付きの二分木 (電子回路) がある
- 葉は 0 を出力する
- 葉以外の頂点は AND か OR のどちらかで、それぞれ子の出力の AND / OR を出力する
- どれが AND でどれが OR かは与えられないので、特定したい
- **OR は $R (\leq 120)$ 個以下 !**



問題概要

- あなたは各辺の上に NOT を好きなだけ設置し，そのときの出力を聞くことができる
- 1000 回以下の質問で，どの頂点に OR が設置されているかを特定せよ
- $N \leq 8000$



小課題 (JOI)

1. (1 点) $N = 1$.
2. (4 点) $N \leq 1000$, $R = 1$.
3. (5 点) $N \leq 1000$.

	$R \leq 70$	$R \leq 120$
パス	小課題 4 : 17 点	小課題 5 : 8 点
完全二分木	小課題 6 : 23 点	小課題 7 : 8 点
一般の二分木	小課題 8 : 27 点	小課題 9 : 7 点

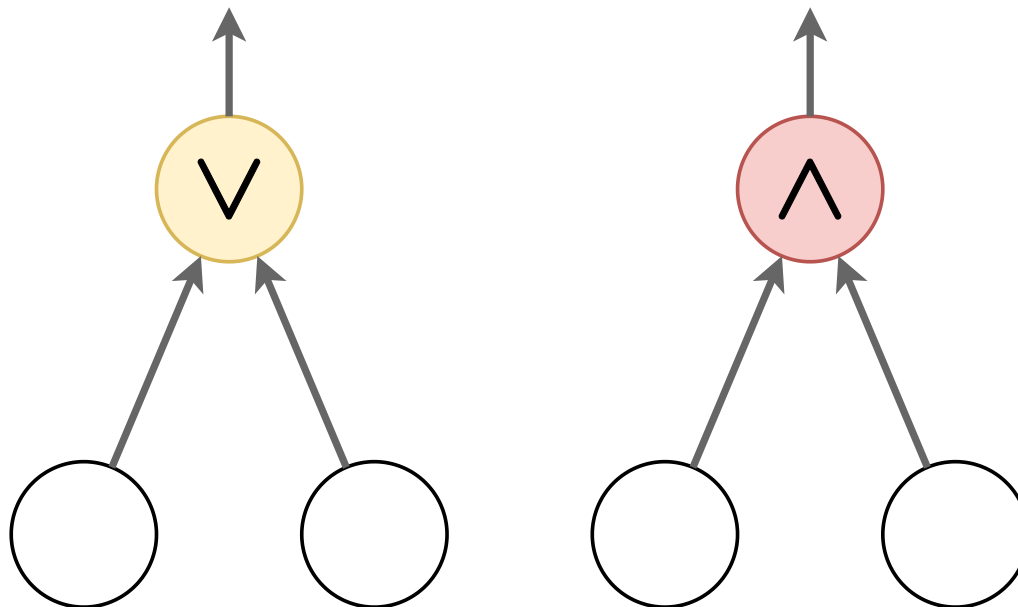
小課題 (JOIG)

1. (1 点) $N = 1$.
2. (8 点) $N \leq 1000$, $R = 1$.
3. (10 点) $N \leq 1000$.

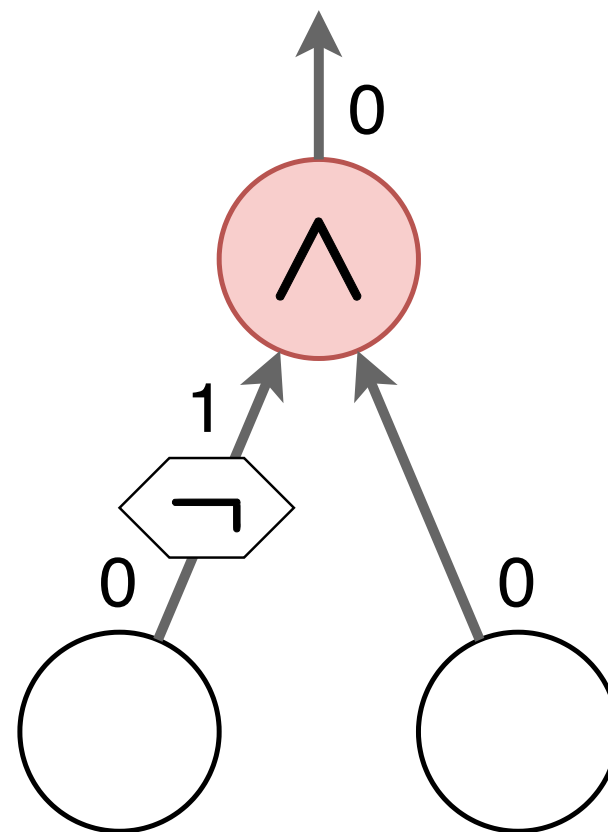
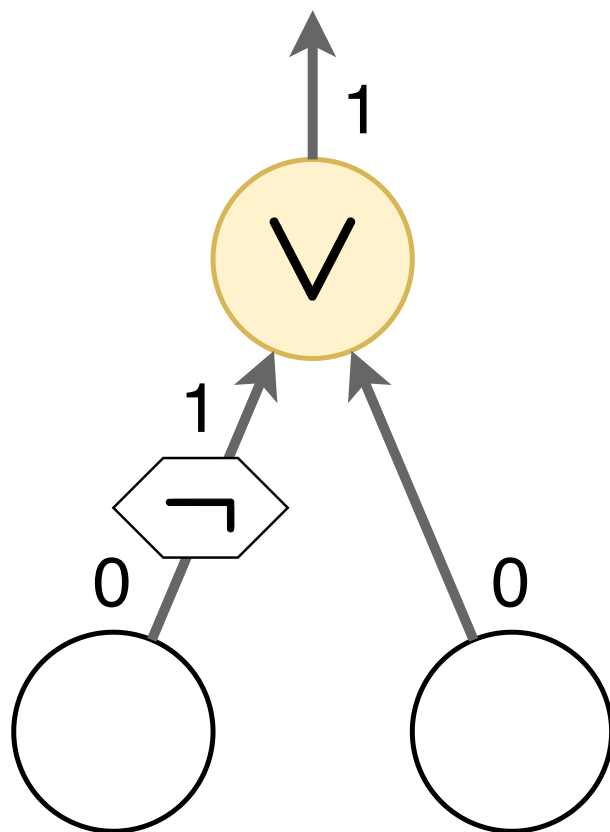
	$R \leq 70$	$R \leq 120$
パス	小課題 4 : 21 点	小課題 5 : 9 点
完全二分木	小課題 6 : 25 点	小課題 7 : 9 点
一般の二分木	小課題 8 : 14 点	小課題 9 : 3 点

小課題 1: $N = 1$

回路は以下のどちらか



小課題 1: $N = 1$



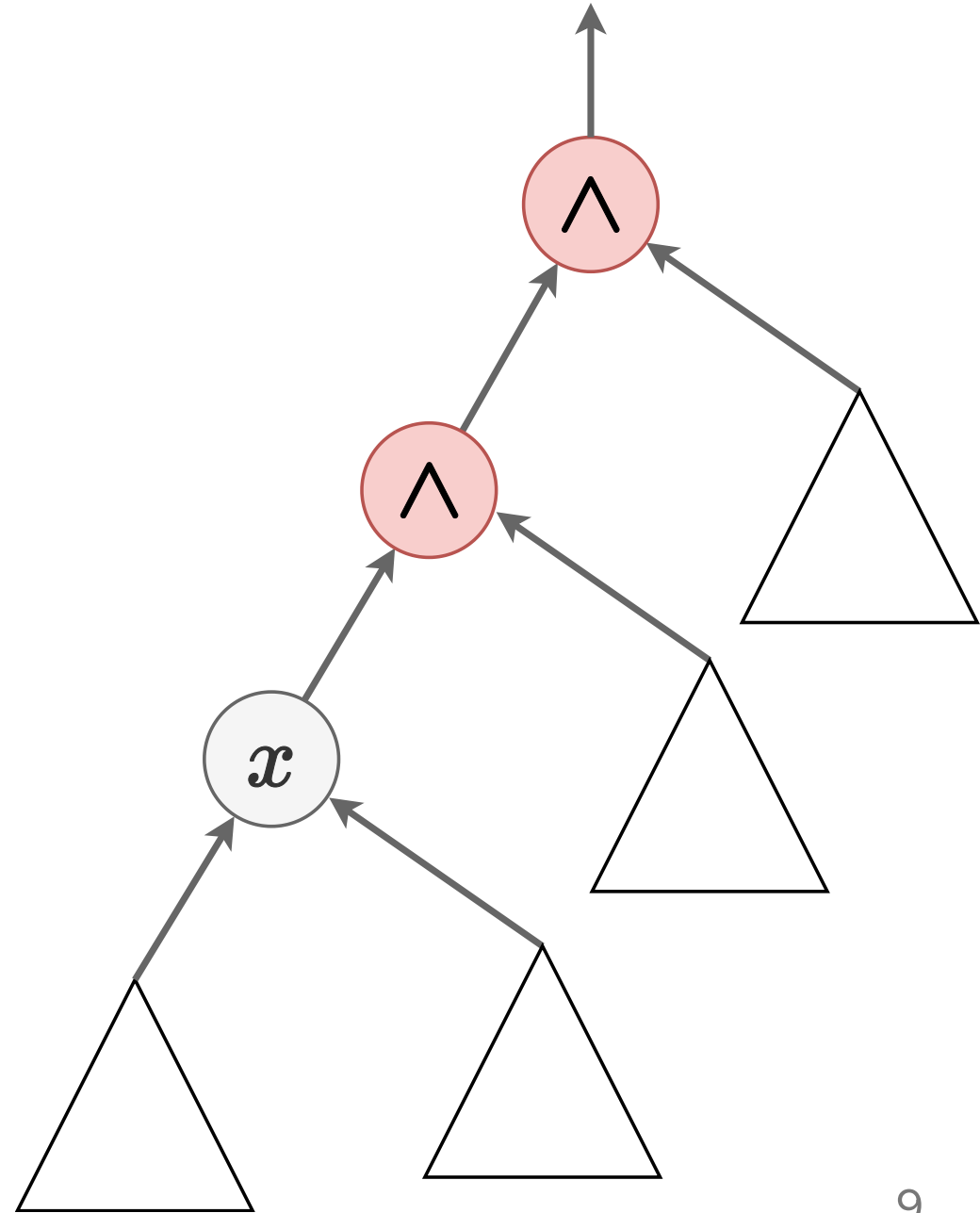
→ 010 を質問すれば区別可能

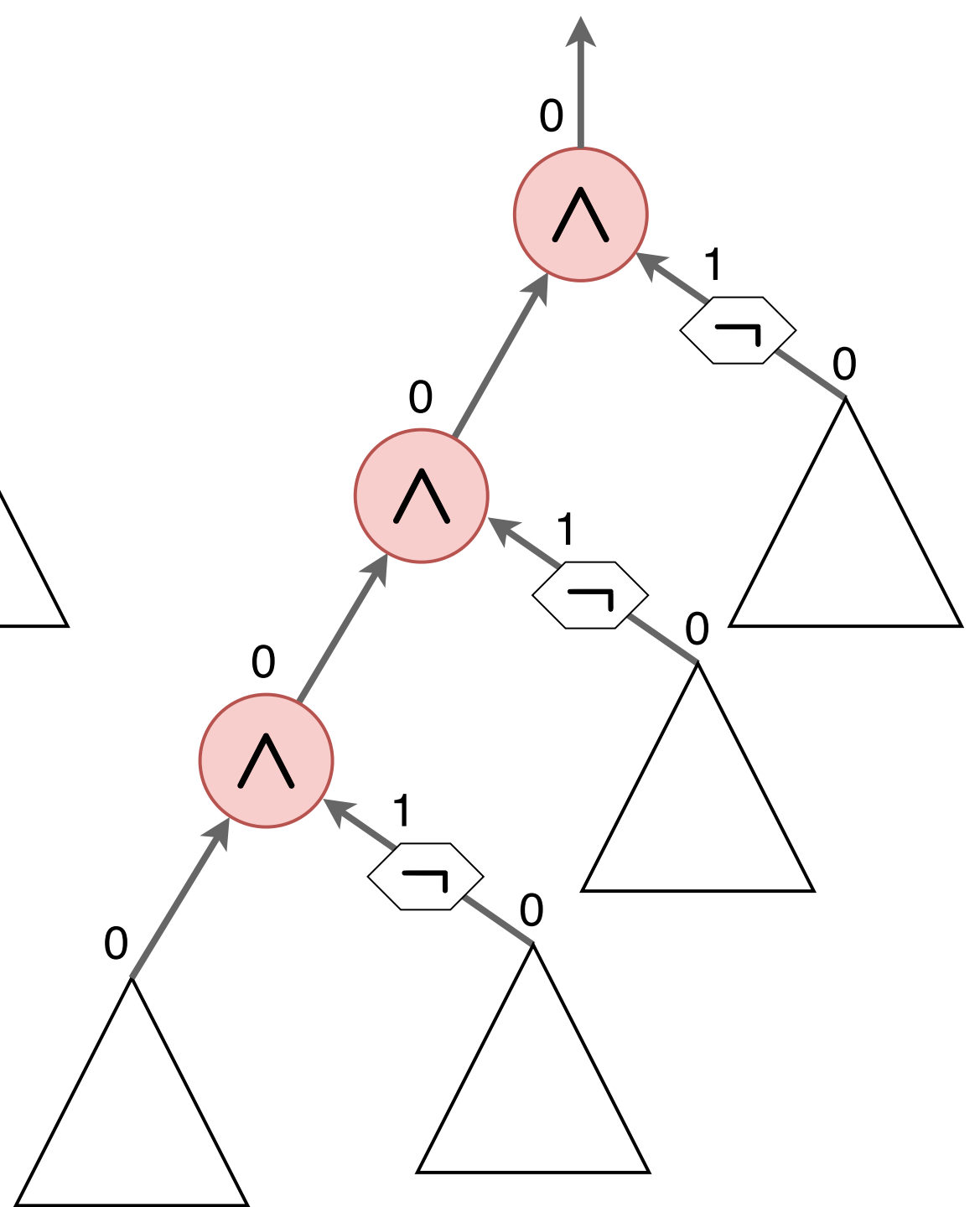
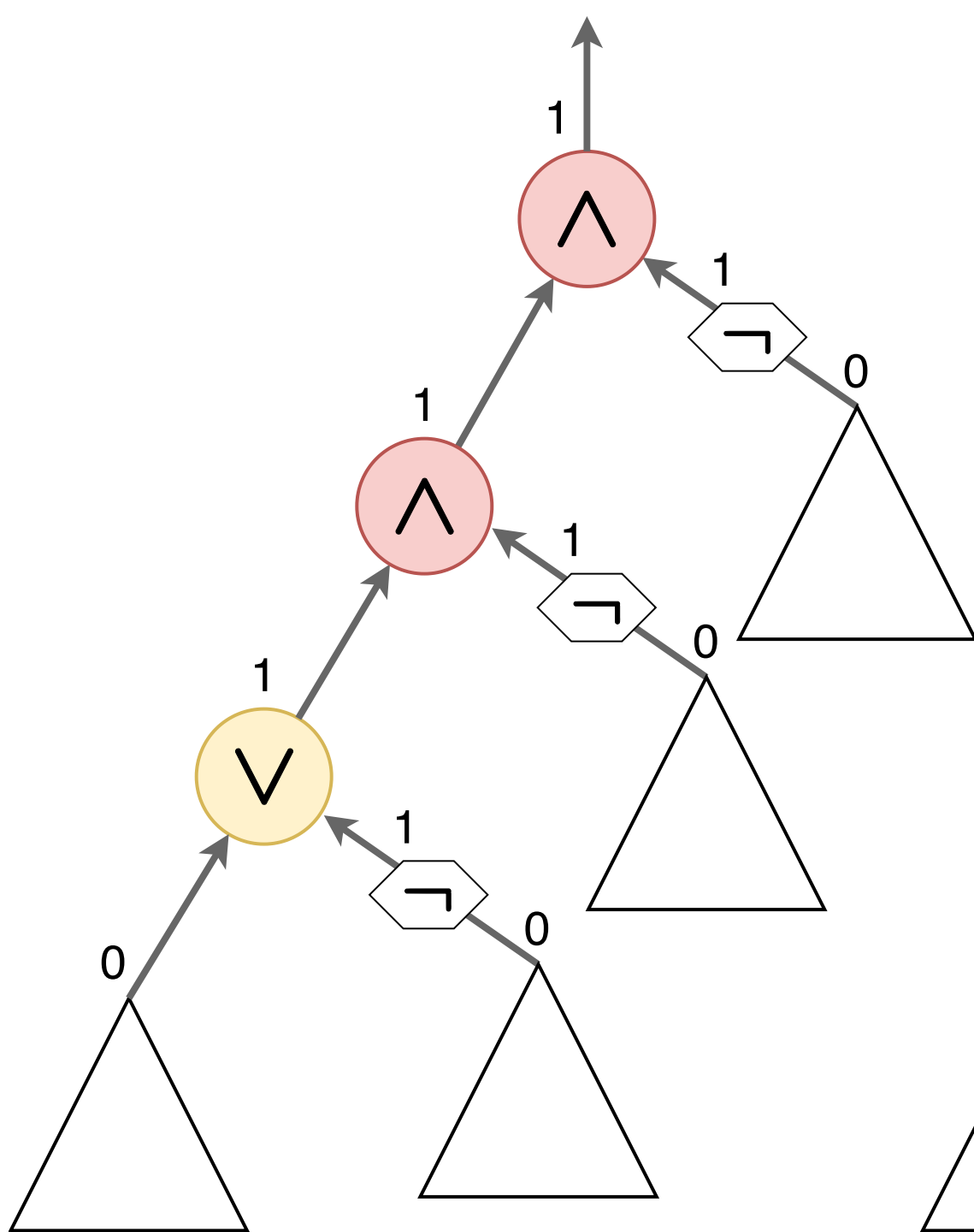
小課題 2: $N = 1000$, $R = 1$

- 各頂点について, OR かどうかを 1 クエリで特定したい

小課題 2: $N = 1000$, $R = 1$

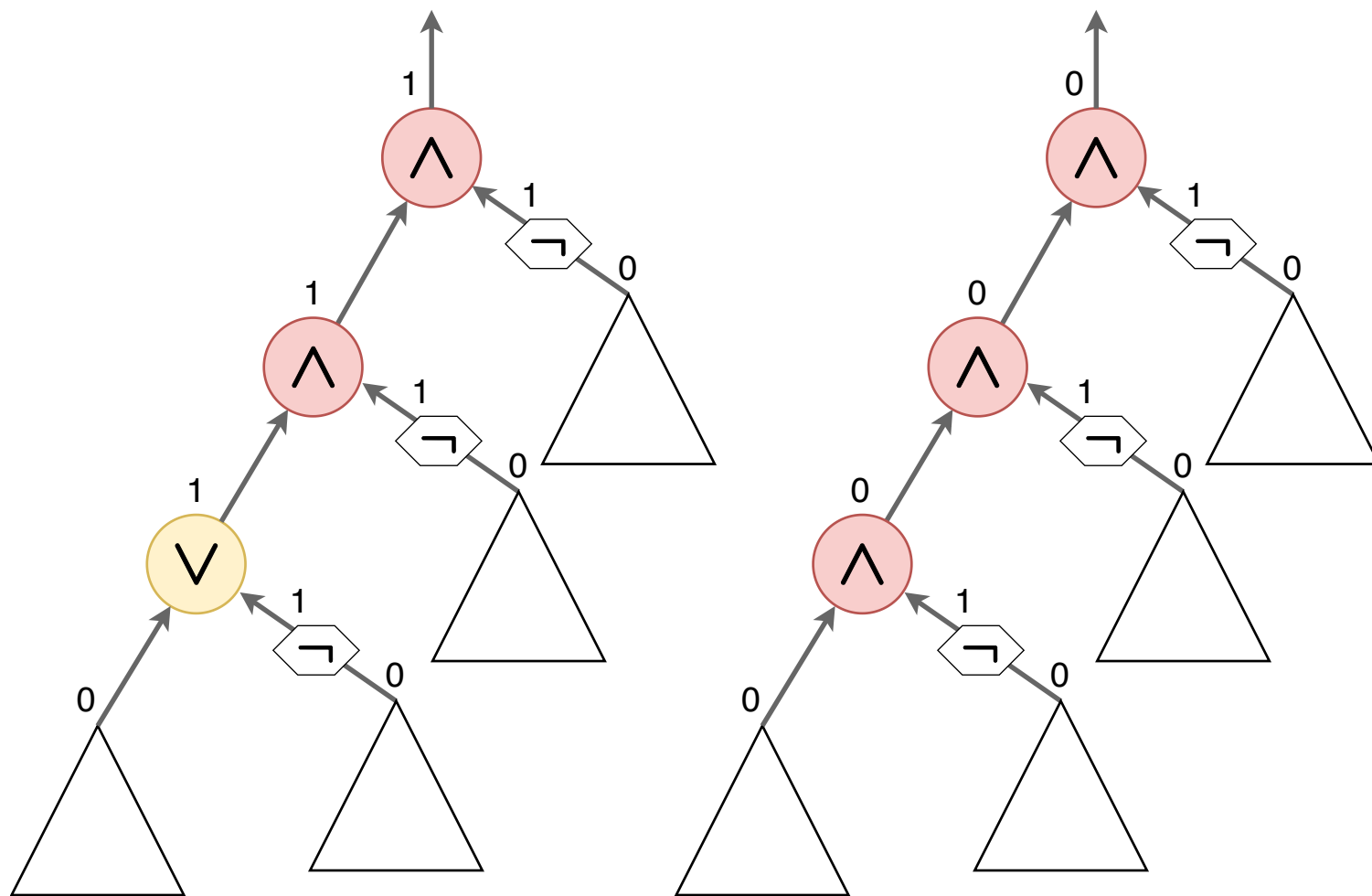
頂点 x が OR であるか聞くには...?





小課題 2: $N = 1000$, $R = 1$

- 根 $-x$ のパスについて、片側から 1 を入力すると区別できる

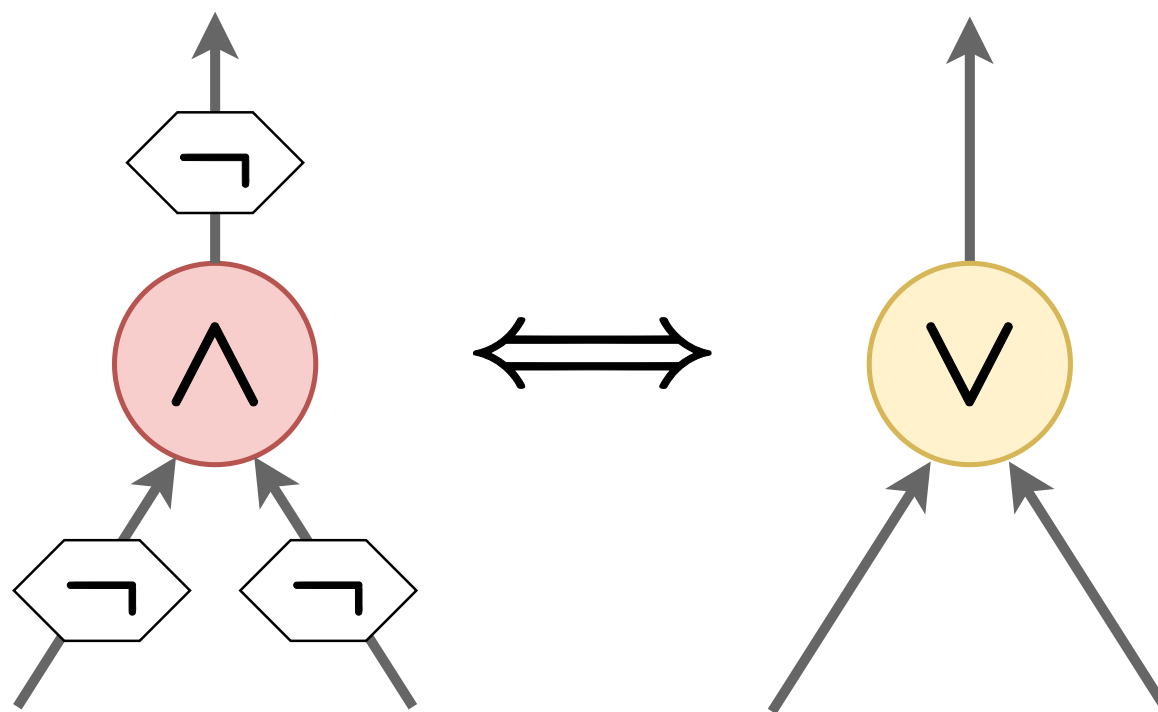


小課題 2: $N = 1000$, $R = 1$

- 根 $-x$ のパスについて, 片側から 1 を入力すると, **そのパス上に OR があるかが分かる**
- 上から順に, その頂点が OR であるかを聞く

小課題 3: $N = 1000$

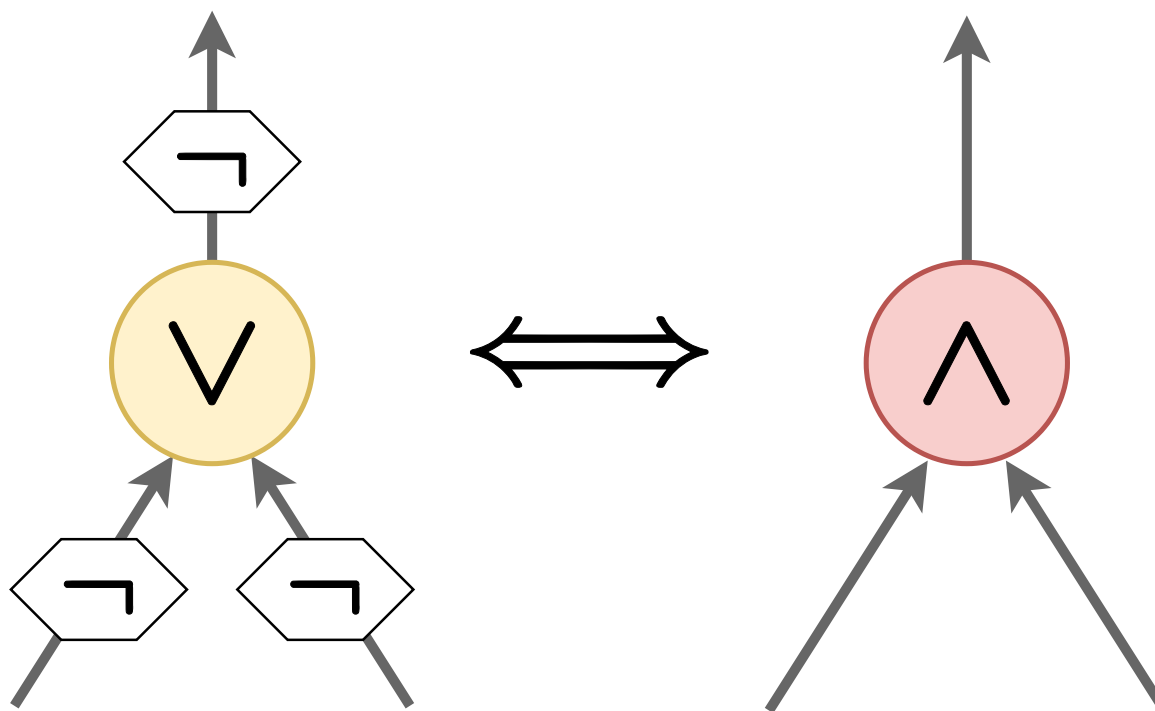
重要な考察



- AND に NOT を 3 個設置すると OR になる

小課題 3: $N = 1000$

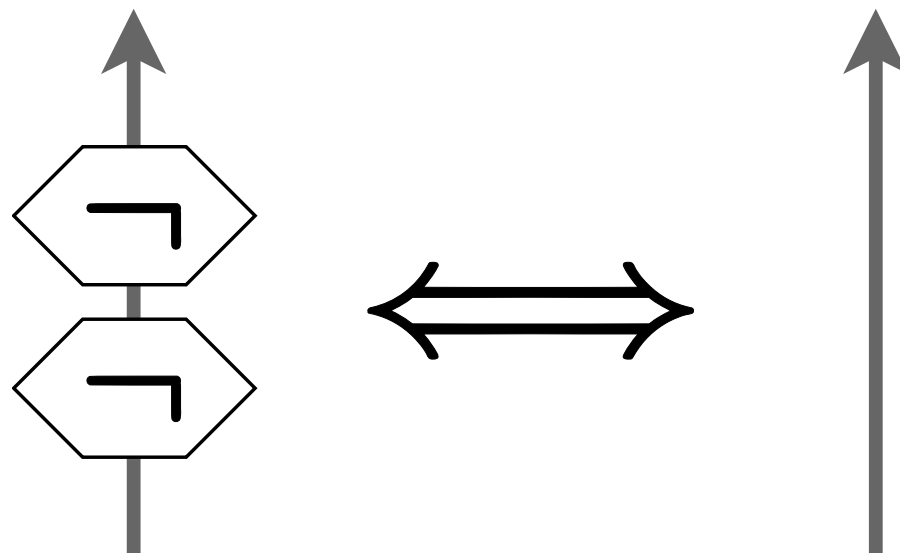
重要な考察



- OR に NOT を 3 個設置すると AND になる

小課題 3: $N = 1000$

重要な考察



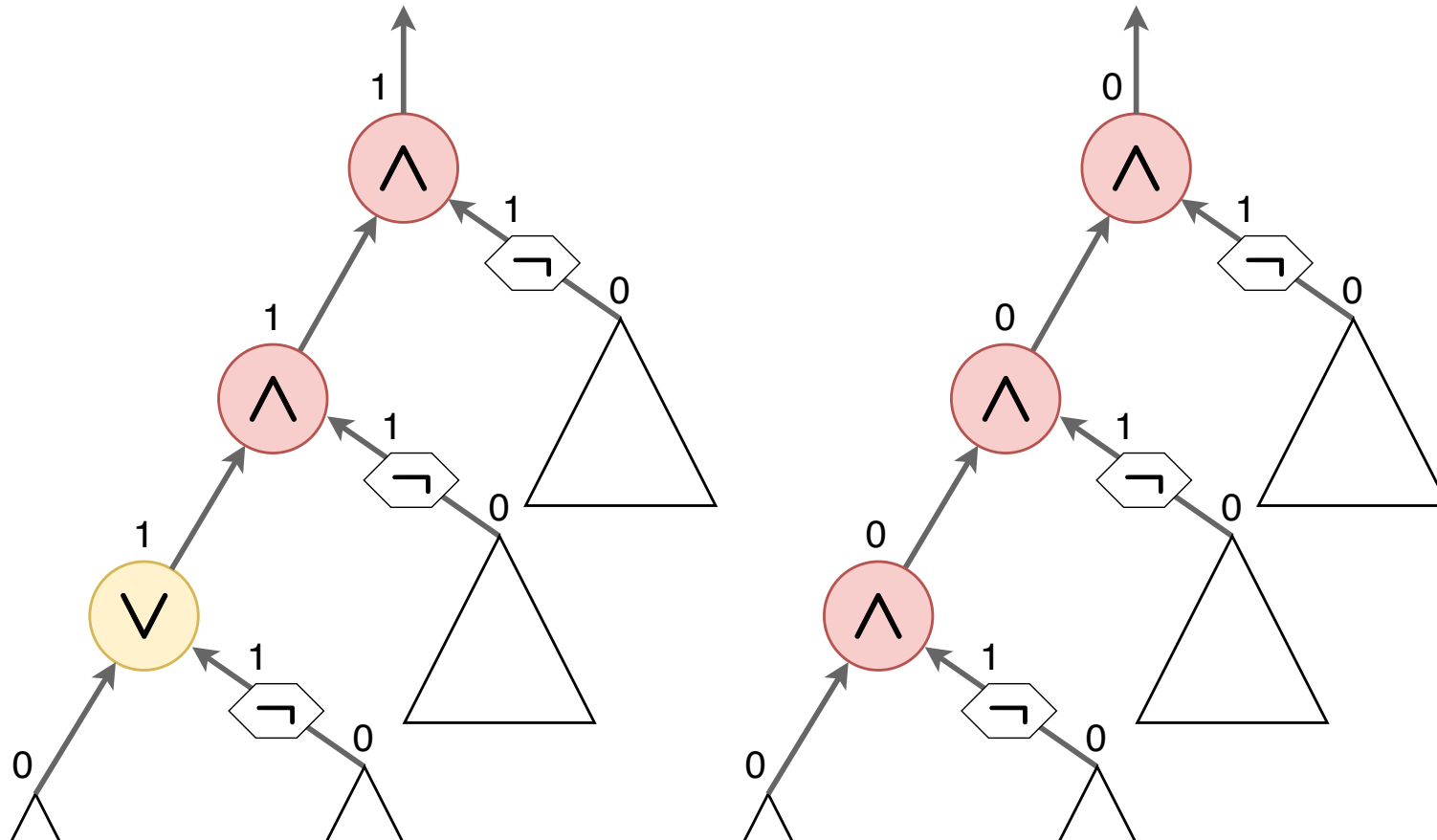
- 2 個の NOT を対消滅させることができる

小課題 3: $N = 1000$

- 小課題 2 と同様に, 上から順に頂点が OR であるかを聞く
- OR だったら, **NOT を 3 個設置して AND であると見なす**

小課題 4: パス, $R \leq 70$

- 根 $-x$ のパスについて, 片側から 1 を入力すると, **そのパス上に OR があるかが分かる**



小課題 4: パス, $R \leq 70$

- 根 $-x$ のパスについて, 片側から 1 を入力すると, **そのパス上に OR があるかが分かる**

→ インタラクティブの基本, **二分探索!**

小課題 4: パス, $R \leq 70$

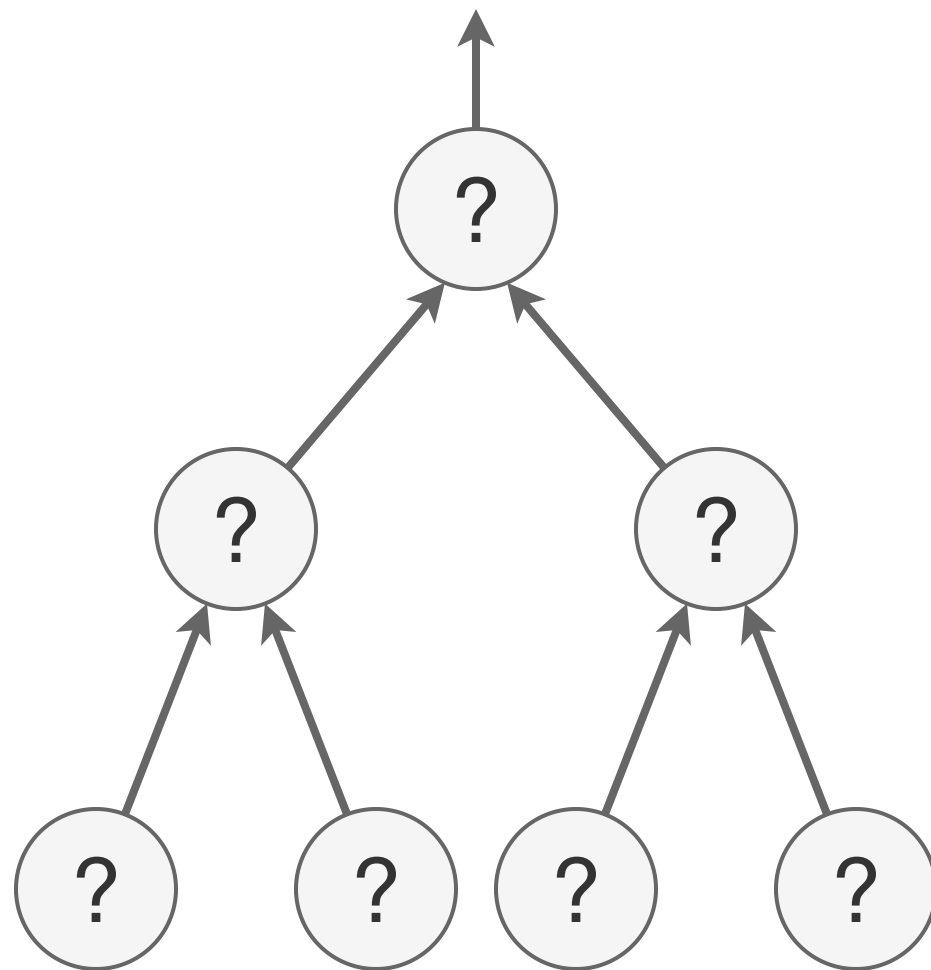
- 根 $-x$ のパスについて, 片側から 1 を入力すると, **そのパス上に OR があるかが分かる**
- 二分探索により, 14 回の質問で**最も根に近い OR の位置**が分かる (工夫すると 13 回)

小課題 4: パス, $R \leq 70$

- 根 $-x$ のパスについて, 片側から 1 を入力すると, **そのパス上に OR があるかが分かる**
- 二分探索により, 14 回の質問で**最も根に近い OR の位置**が分かる (工夫すると 13 回)
- OR の位置が分かったら, NOT を 3 個設置して AND であると見なす

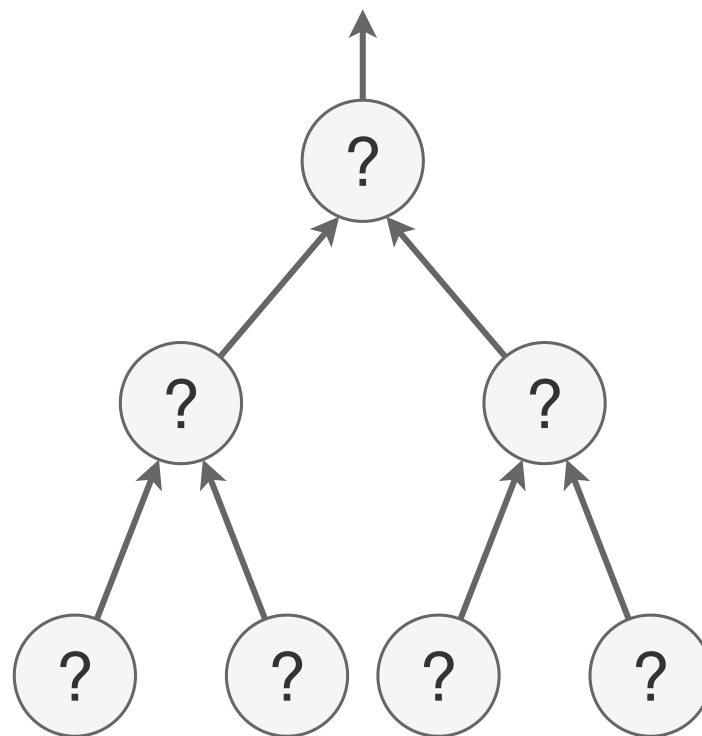
→ $14 \times 70 = 980$ 回の質問で解けた

小課題 6 : 完全二分木, $R \leq 70$



Q. どうやって二分探索する？

小課題 6 : 完全二分木, $R \leq 70$

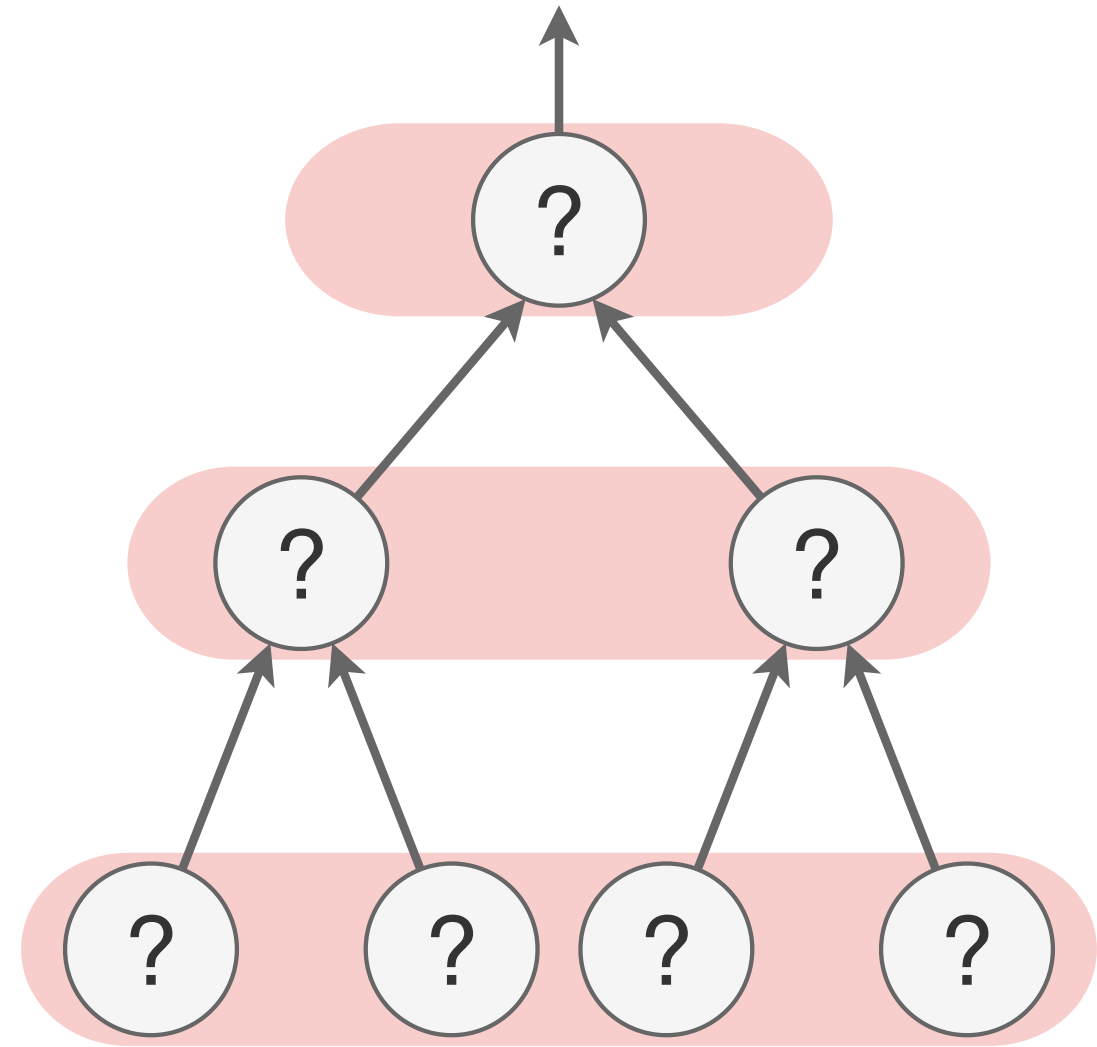


Q. どうやって二分探索する？

ヒント: 上から順に決める

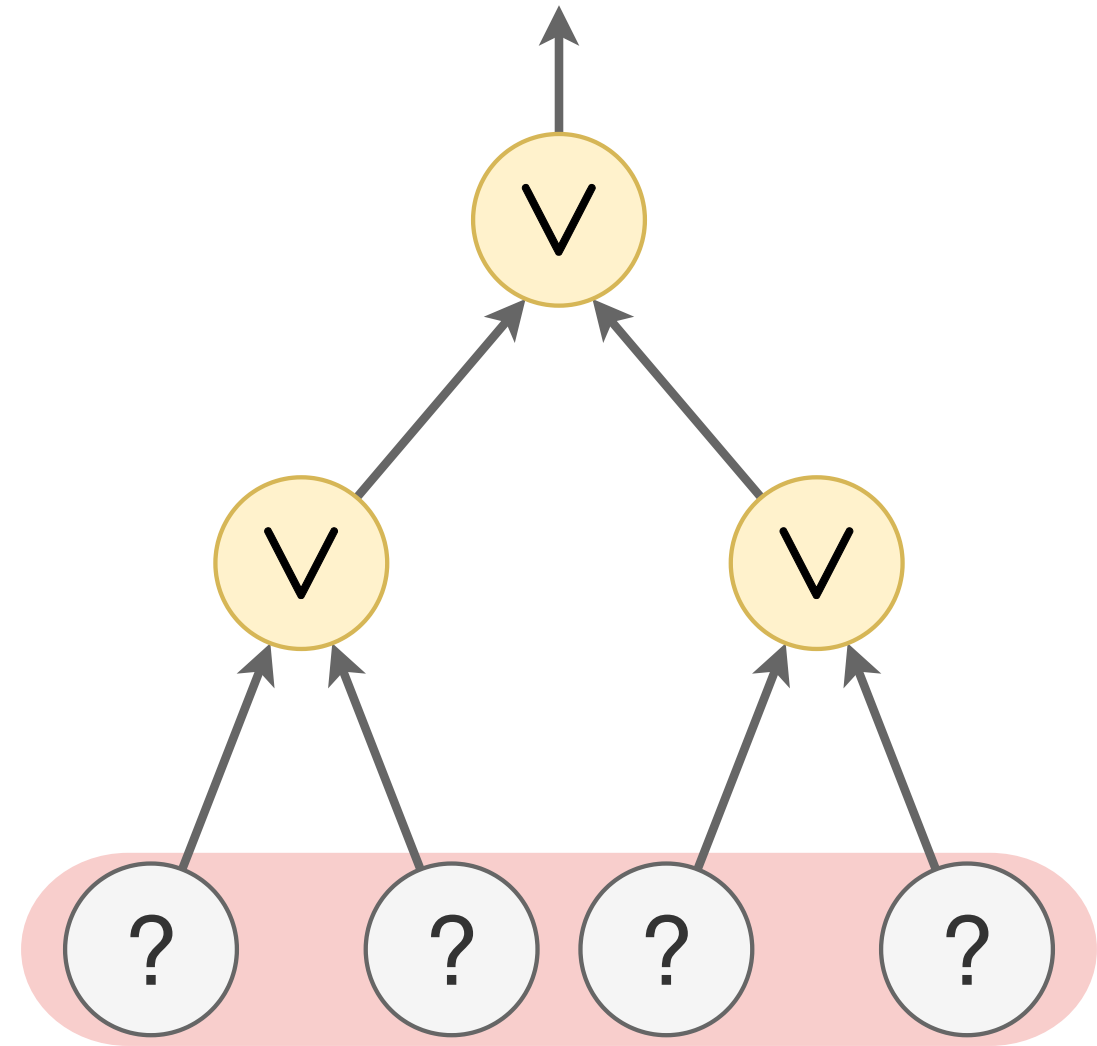
小課題 6 : 完全二分木, $R \leq 70$

上から順に決める



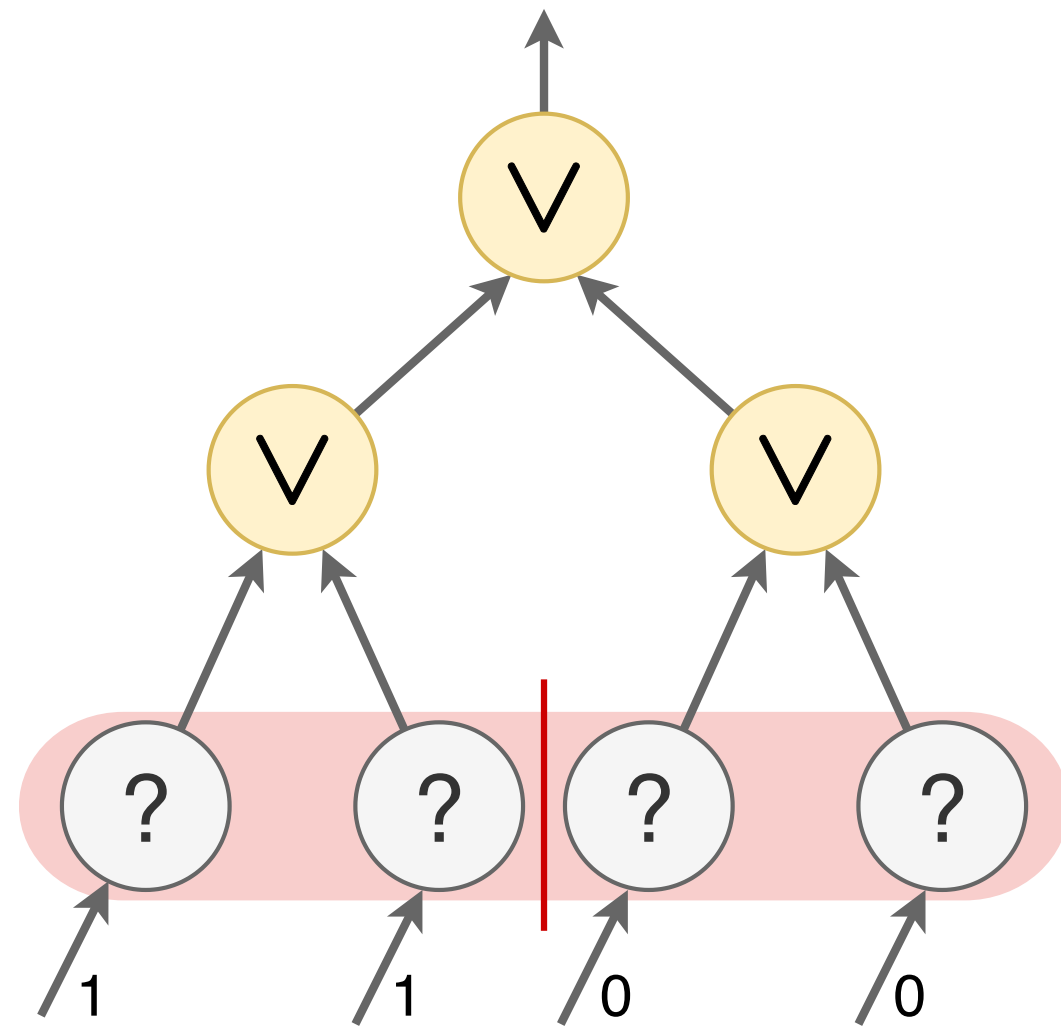
小課題 6 : 完全二分木, $R \leq 70$

Q. 上が全部 OR であるとき,
同じ高さにある頂点の集合を
二分探索するには？



小課題 6: 完全二分木, $R \leq 70$

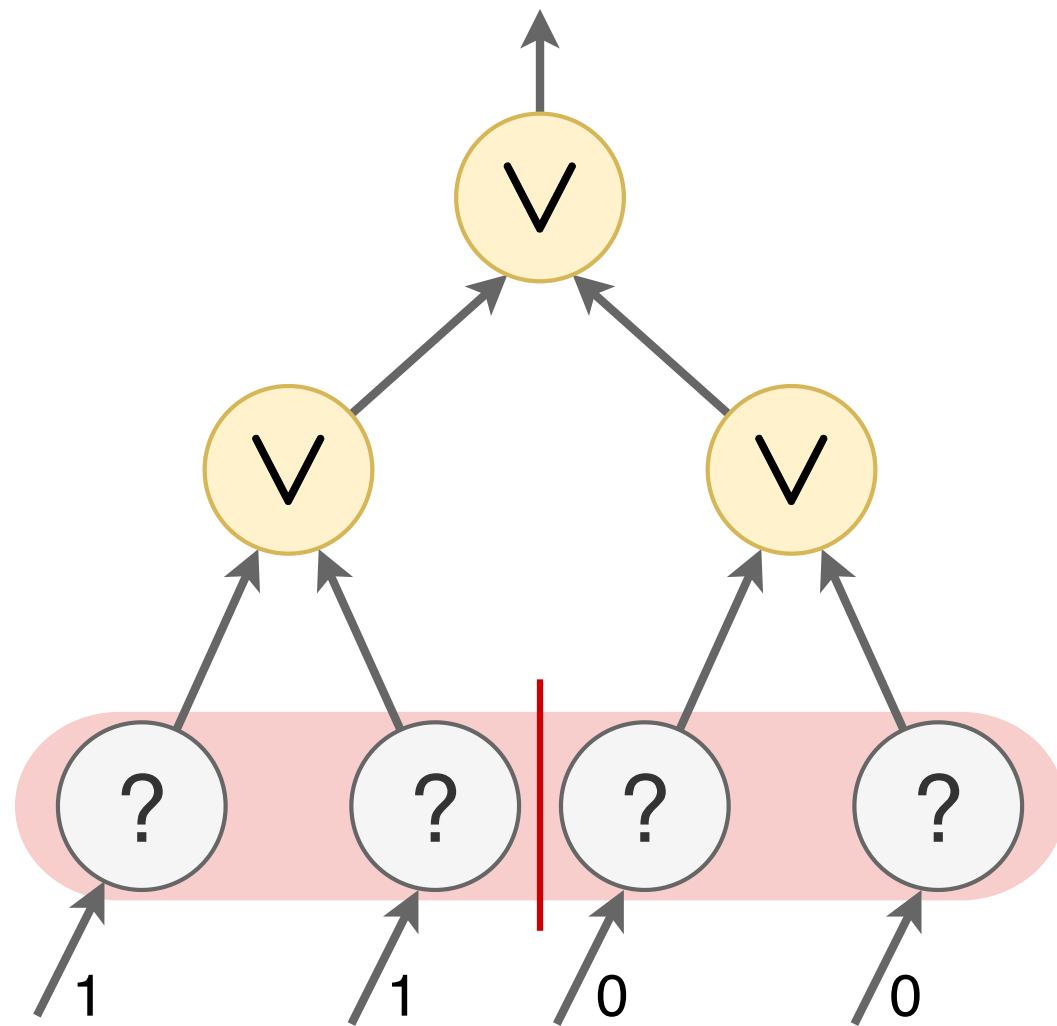
- あるところまで 1, あるところから 0 を片側に
入力すると,
**1 を入力した頂点の中に OR が
あるかどうか分かる**



小課題 6 : 完全二分木, $R \leq 70$

- あるところまで 1, あるところから 0 を片側に入力すると,
1 を入力した頂点の中に OR があるかどうか分かる

→ 二分探索により, 13 回の質問で
最も左にある OR の位置が分かる
(工夫すると 12 回)



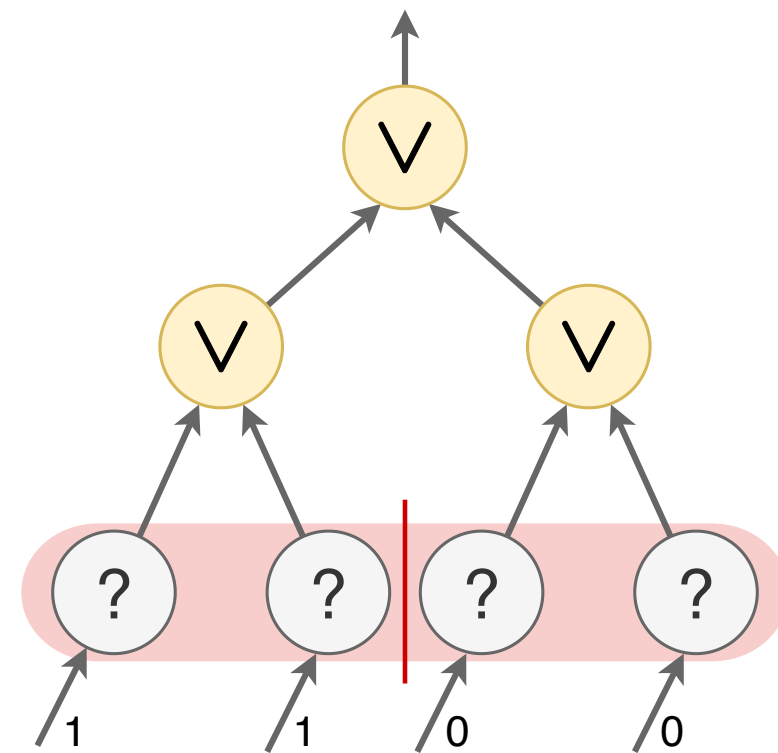
小課題 6 : 完全二分木, $R \leq 70$

- あるところまで 1, あるところから 0 を片側に入力すると, **1 を入力した頂点の中に OR があるかどうか** 分かる

→ 二分探索により, 13 回の質問で**最も左にある OR の位置**が分かる (工夫すると 12 回)

- 発見した OR は AND に変更し, 1 段終わったらすべて OR に変更する

$13 + 13 \times 70 = 923$ 回の質問で解けた



小課題 8: 一般の二分木, $R \leq 70$

これまでのまとめ

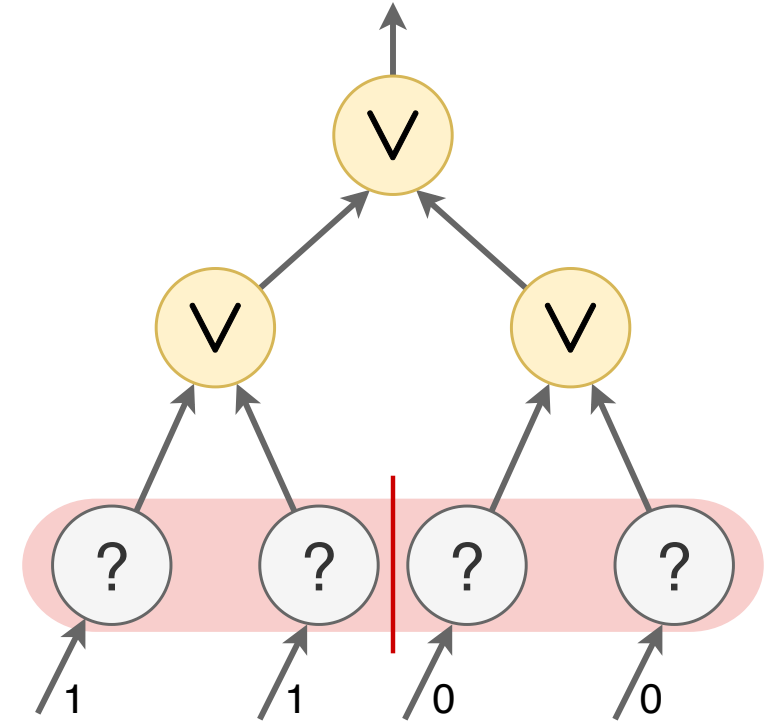
- 根からのパス
- 同じ高さの頂点の集合

は二分探索できる

Q. 一般の二分木の場合はどのように二分探索する？

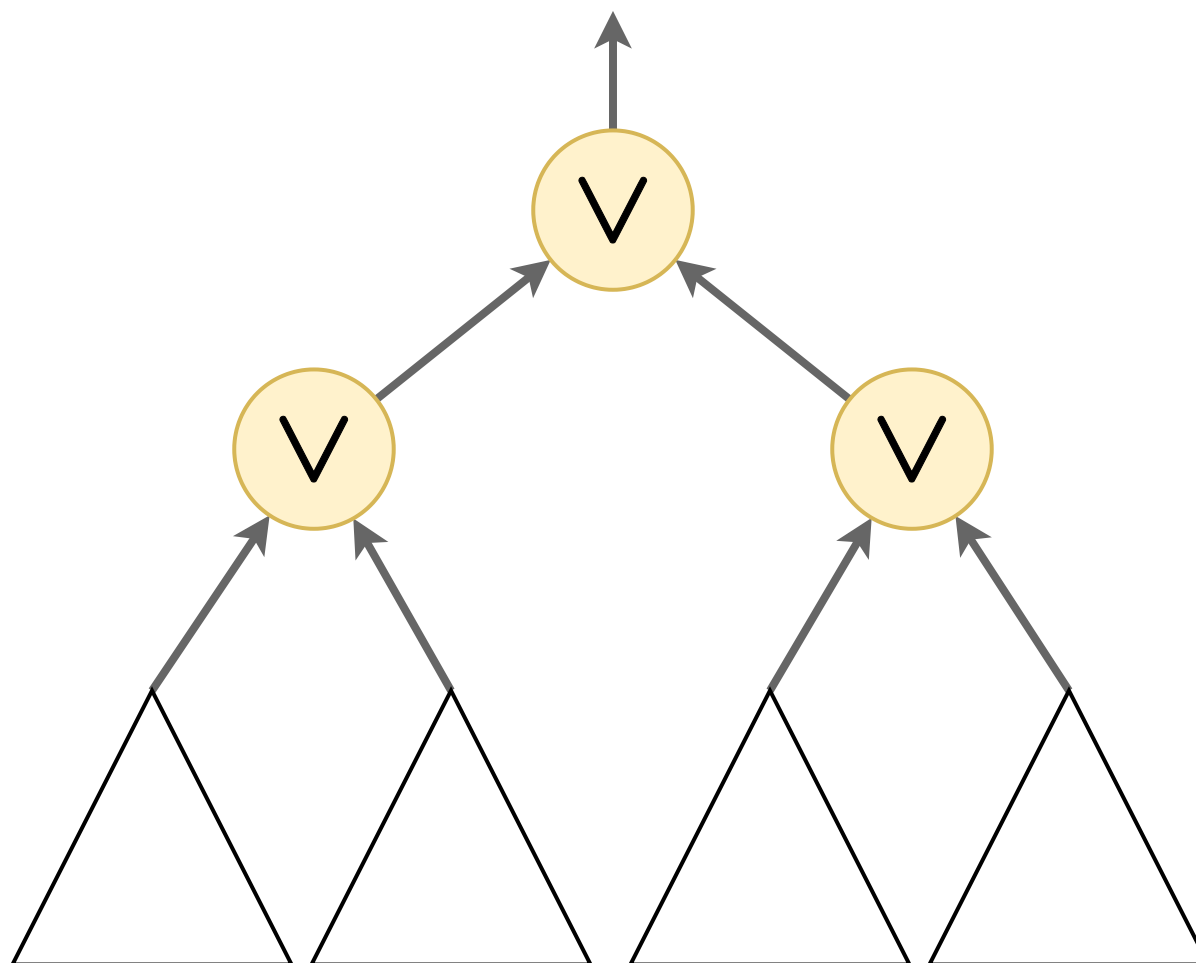
小課題 8: 一般の二分木, $R \leq 70$

なぜ同じ高さの頂点が二分探索できたのか？

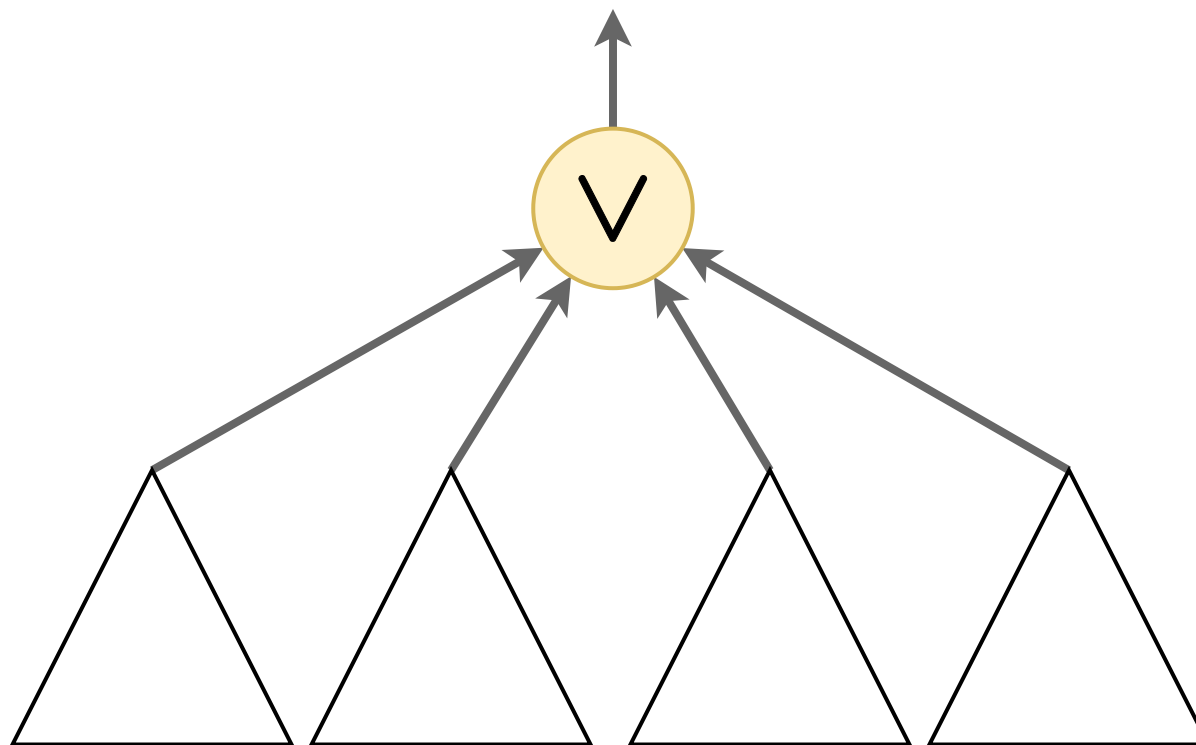


小課題 8: 一般の二分木, $R \leq 70$

上が全部 OR であるとき...

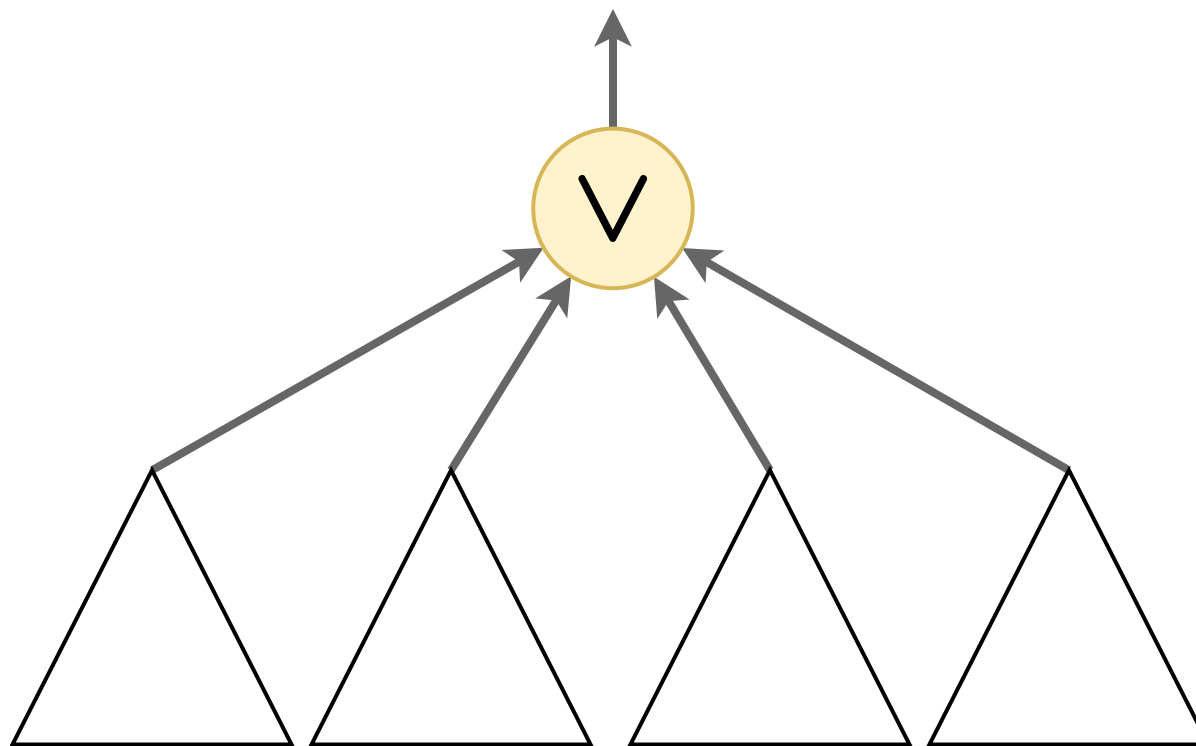


小課題 8: 一般の二分木, $R \leq 70$



すべての部分木の OR が出力される！

小課題 8: 一般の二分木, $R \leq 70$



すべての部分木の OR が出力される... ?

小課題 8 : 一般の二分木, $R \leq 70$

もしかして : Space Thief

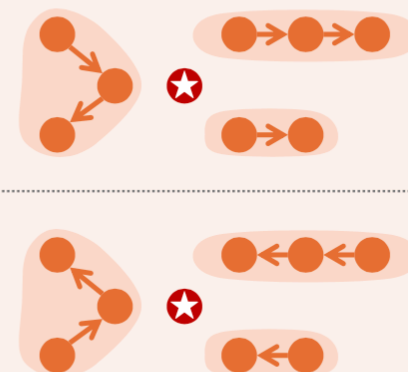
木の重心で分ける

41 / 68

木の重心を中心としたスターグラフ
だと思って問題を解く

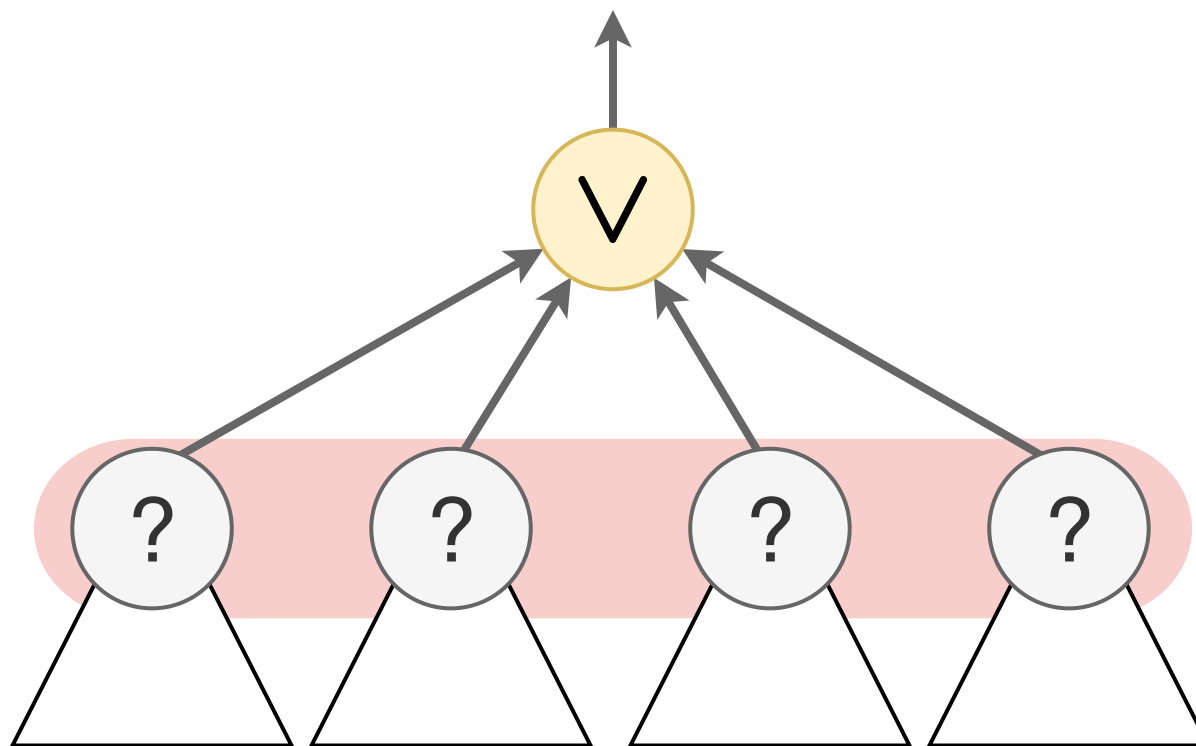
→ もし No しか得られなかった場
合 A, B は同じ “連結成分”

アイデア: このとき各 ~~連結成分~~
部分木
に対して同じ問題を並列に解く!



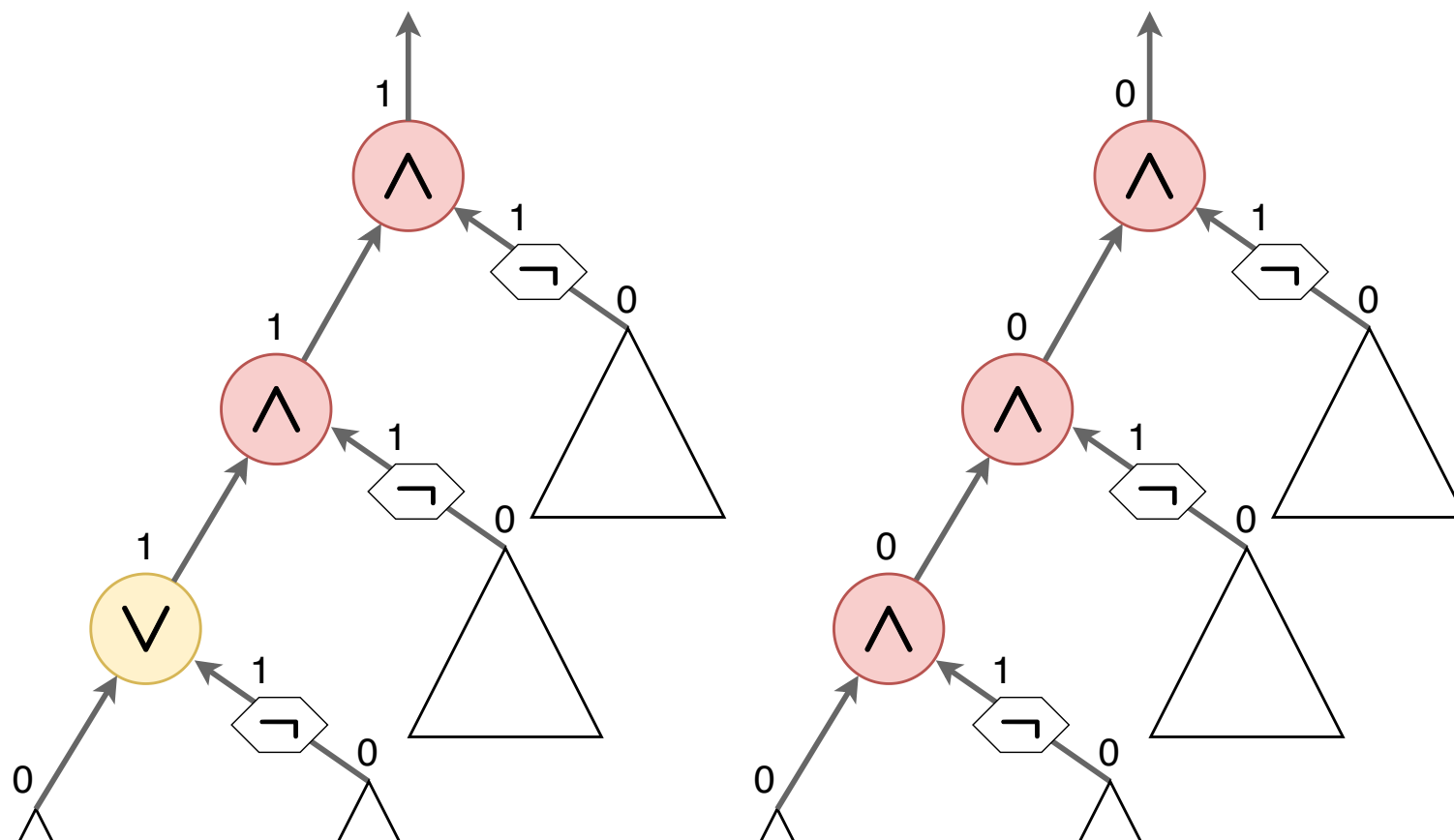
小課題 8: 一般の二分木, $R \leq 70$

- 各部分木で根のみを聞くと, 同じ高さの頂点を聞くのと同じ



小課題 8: 一般の二分木, $R \leq 70$

- 各部分木で根のみを聞くと，同じ高さの頂点を聞くのと同じ
- ところで，パスの場合は二分探索できた



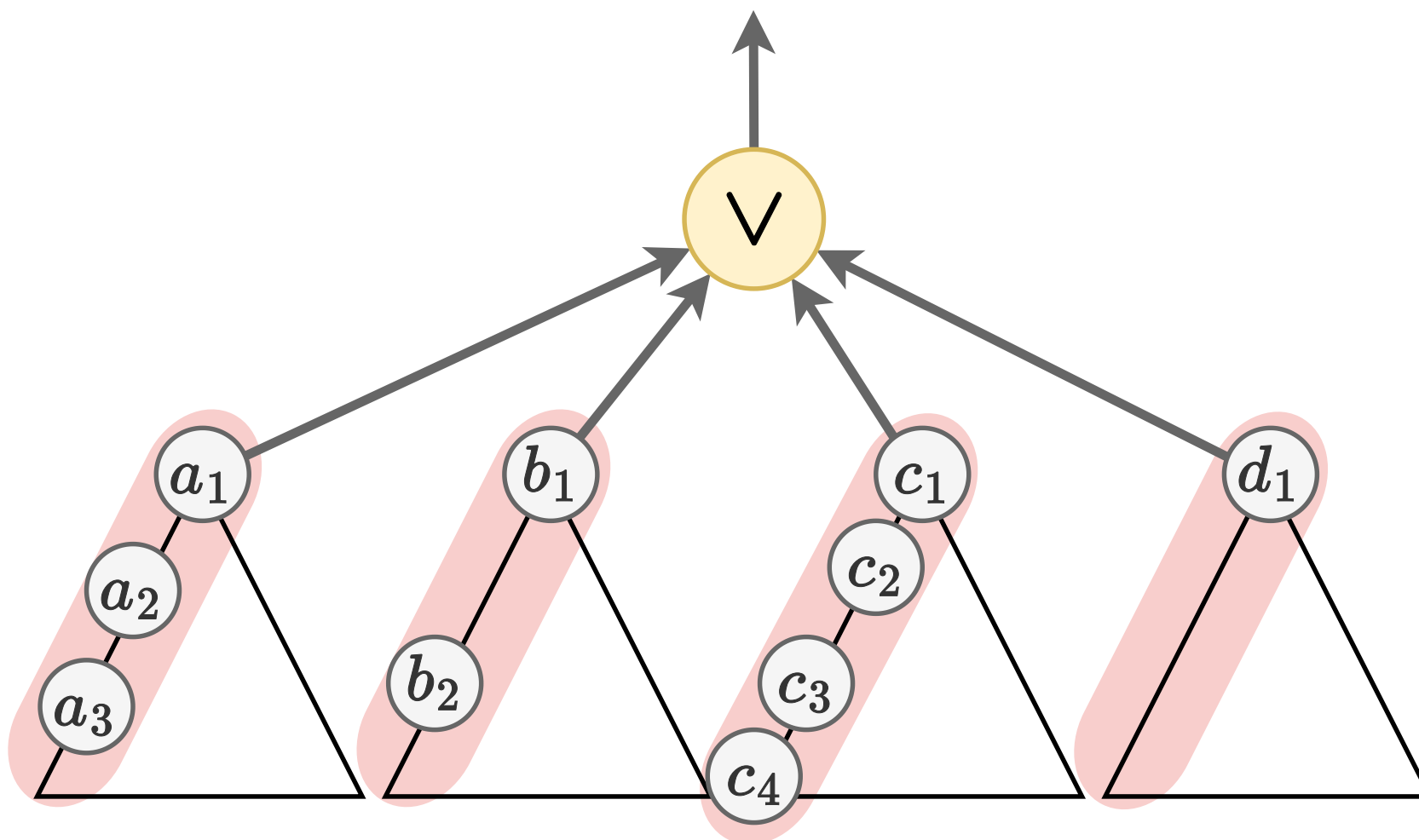
小課題 8: 一般の二分木, $R \leq 70$

- 各部分木で根のみを聞くと, 同じ高さの頂点を聞くのと同じ
- ところで, パスの場合は二分探索できた

→ **各部分木で根からのパスを聞こう!**

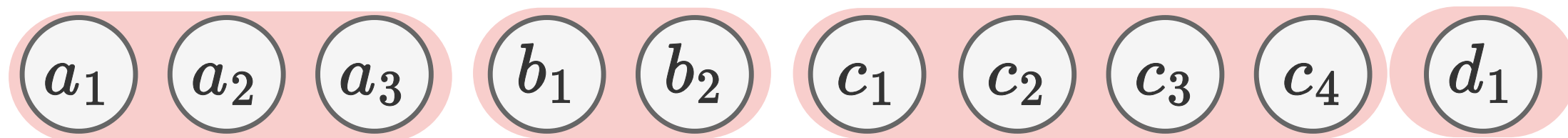
小課題 8: 一般の二分木, $R \leq 70$

- 各部分木で根からのパスを聞く



小課題 8 : 一般の二分木, $R \leq 70$

- 各部分木で根からのパスを聞く



パスをつなげる / トポロジカルソート すると,
この頂点の列を二分探索できる !

小課題 8: 一般の二分木, $R \leq 70$

まとめ

以下を繰り返す

1. 各部分木について, **根からのパスを 1 つ選ぶ**
2. パスをつなげて二分探索し, パス上の OR をすべて見つける
3. パス上の AND を OR に変更する
4. パスを削除し, いくつかの部分木に分解する

→ どのようなパスを選ぶのが良いか?

小課題 8: 一般の二分木, $R \leq 70$

Q. 木をパスに分解して, 高さを $O(\log N)$ に
する方法といえは?

小課題 8 : 一般の二分木, $R \leq 70$

Q. 木をパスに分解して, 高さを $O(\log N)$ にする方法といえバ?

A. **HL 分解!**

小課題 8 : 一般の二分木, $R \leq 70$

以下を繰り返す :

1. 各部分木について, 根からのパスを 1 つ選ぶ
 - **HL 分解 : 左右の子のうち部分木の頂点数が多い方に降りていくようなパスを選ぶ**
2. パスをつなげて二分探索し, パス上の OR をすべて見つける
 - 二分探索で 14 回 (工夫すると 13 回)
3. パス上の AND を OR に変更する
4. パスを削除し, いくつかの部分木に分解する

以下を繰り返す：

1. 各部分木について，根からのパスを 1 つ選ぶ
 - **左右の子のうち部分木の頂点数が多い方に降りていくようなパスを選ぶ**
2. パスをつなげて二分探索し，パス上の OR をすべて見つける
 - 二分探索で 14 回 (工夫すると 13 回)
3. パス上の AND を OR に変更する
4. パスを削除し，いくつかの部分木に分解する

繰り返しは $\text{floor}(\log_2(N + 1)) \leq 12$ 回以下 なので，
 $12 + 14 \times 70 = 992$ 回の質問で解けた！

小課題 5: パス, $R \leq 120$

質問回数を削減したい！

小課題 4: パス, $R \leq 70$

- 根 $-x$ のパスについて, 片側から 1 を入力すると, **そのパス上に OR があるかが分かる**
- 二分探索により, 14 回の質問で**最も根に近い OR の位置**が分かる (工夫すると 13 回)
- OR の位置が分かったら, NOT を 3 個設置して AND であると見なす

→ $14 \times 70 = 980$ 回の質問で解けた

どこに無駄があった？

小課題 5: パス, $R \leq 120$

確率的に考えよう！

区別しなければならない答えは $\sum_{r=0}^{120} \binom{8000}{r} \approx 2^{894.1}$ 通り

これが一様ランダムに選ばれるとしたとき,
二分探索で, 最初に「前半分の中に OR がありますか？」を聞くと
確率 3.1×10^{-37} で NO になる

→ ほとんど情報を得られていない！

小課題 5: パス, $R \leq 120$

確率が $1/2$ に近くなるように二分探索しよう！

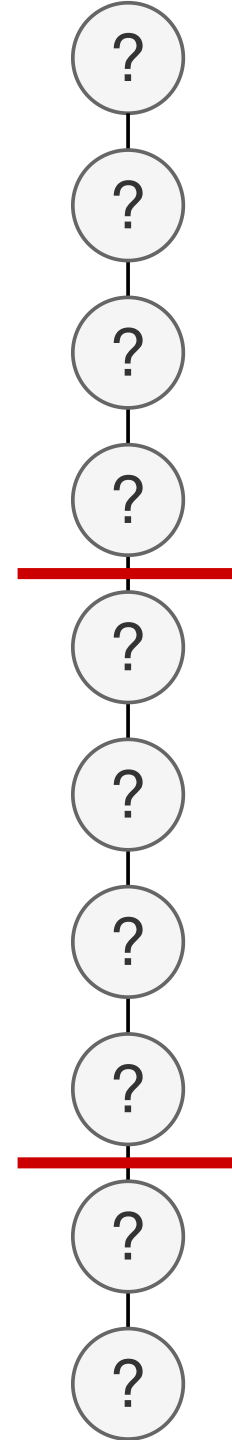
小課題 5: パス, $R \leq 120$

例

パスを 64 頂点ずつに分割し, 上から順に
二分探索で OR を探す

パスが $8000/64 = 125$ 個に分割され, 1 回の
二分探索に 7 回かかるので,

$125 + 7 \times 120 = 965$ 回の質問で解けた!



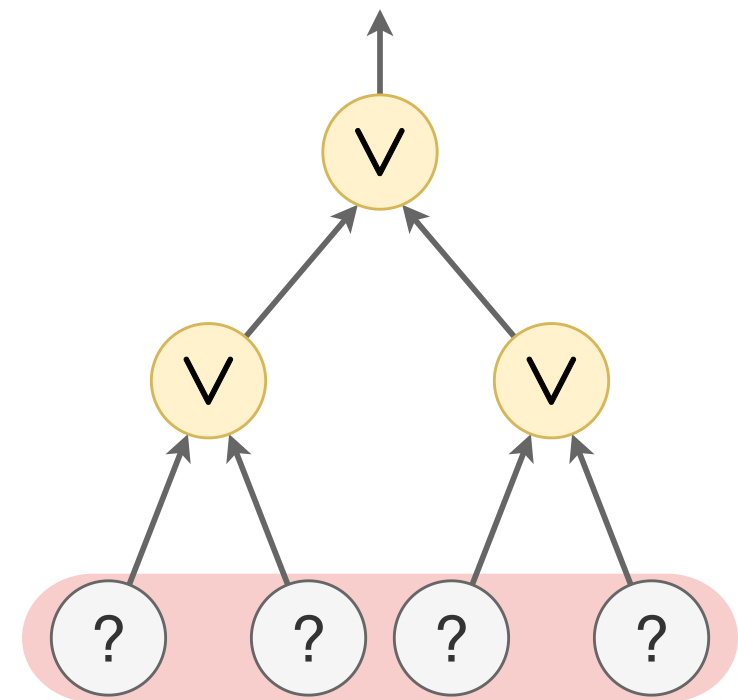
小課題 7: 完全二分木, $R \leq 120$

高さごとに分割

パスを 64 頂点ずつに分割し,
上から順に二分探索で OR を探す

パスが 131 個に分割され,
1 回の二分探索に 7 回かかるので,

$131 + 7 \times 120 = 971$ 回の質問で解けた！



小課題 9 : 一般の二分木, $R \leq 120$

HL 分解し, light-edge の深さごとに分割

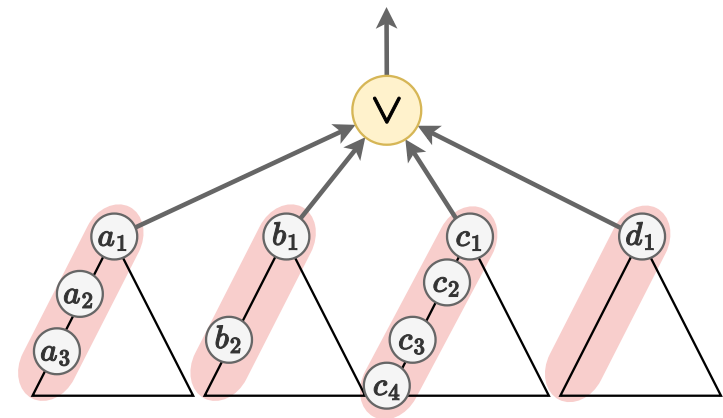
パスを 64 頂点ずつに分割し,

上から順に二分探索で OR を探す

パスが $12 + 125 = 137$ 個に分割され,

1 回の二分探索に 7 回かかるので,

$137 + 7 \times 120 = 977$ 回の質問で解けた !



小課題 9 : 一般の二分木, $R \leq 120$

HL 分解し, light-edge の深さごとに分割

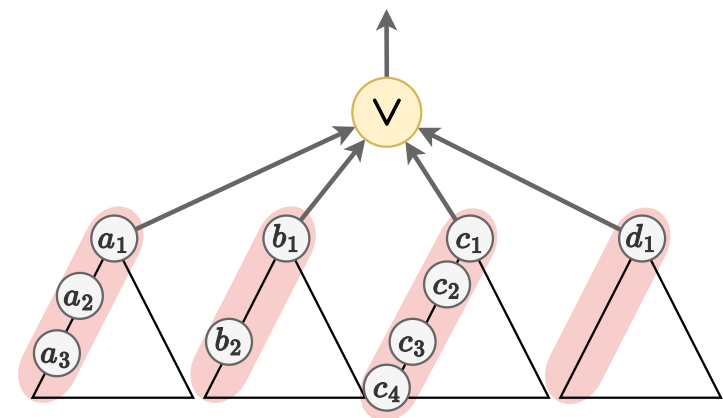
パスを 64 頂点ずつに分割し,

上から順に二分探索で OR を探す

パスが $12 + 125 = 137$ 個に分割され,

1 回の二分探索に 7 回かかるので,

$137 + 7 \times 120 = 977$ 回の質問で解けた !



小課題 9 : 一般の二分木, $R \leq 120$

オーダー解析

パスを w 頂点ずつに分割すると,
パスが $\log_2(N + 1) + N/w$ 個できる.

1 回の二分探索に $1 + \log_2 w$ 回かかるから,
質問が $(1 + \log_2 w)R + \log_2(N + 1) + N/w$ 回

$w = \ln 2 \cdot N/R$ とすると最小になり,
 $\log_2(N + 1) + (1.91 + \log_2(N/R))R$ 回で解ける !

統計情報 (JOI)

得点	小課題									人数	累積
100	1	2	3	4	5	6	7	8	9	2	2
77	1	2	3	4	-	6	-	8	-	1	3
66	1	2	3	4	5	6	7	-	-	1	4
57	1	-	-	4	5	6	7	-	-	1	5
50	1	2	3	4	-	6	-	-	-	2	7
27	1	2	3	4	-	-	-	-	-	7	14
26	1	2	-	4	5	-	-	-	-	1	15
10	1	2	3	-	-	-	-	-	-	5	20
1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	2	22
0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3	25

統計情報 (JOIG)

得点	小課題										人数	累積
40	1	2	3	4	-	-	-	-	-		1	1
1	1	-	-	-	-	-	-	-	-		5	6
0	-	-	-	-	-	-	-	-	-		7	13