5

神経衰弱 2 (Pair Matching 2)

Author: 山縣 龍人 (tatyam)

0 問題概要

$1, 2, \ldots, N$ の書かれたカードが 2 枚ずつ，合計 $2N$ 枚のカードが一列に並んでいる．ビ太郎は左から順にカードを見ていき，それぞれ拾うか拾わないかを選ぶ．「拾ったカードに書かれていた整数」が，「1 つ前に拾ったカードに書かれていた整数」または「2 つ前に拾ったカードに書かれていた整数」と一致しているとき，拾ったカードに書かれていた整数を a として V_a 点を得る．ビ太郎が得られる最大の得点はいくつか？

1 考察

最終的な得点に関わらないカードは拾っても無駄であるから，そのようなカードは拾わないものとする．この制約を加えたとき，あなたは以下のようにカードを拾う必要がある．

- カード i と同じ整数が書かれたもう 1 枚のカードをカード p_i とする．
- カード i を拾うならば，カード p_i も拾わなければならない．さらに，カード i とカード p_i の間で拾うカードは 1 枚以下である．

この制約の中で，どのようにカードを拾うことができるかを考える．

整数 x が書かれている 2 枚のカードをペア x と呼ぶことにする．また，ペアの 2 枚のカードの間の区間 (両端を含まない) を区間 x と呼ぶ．

- 例えば，$A = (1, 1, 2, 2, 3, 3)$ と並んだカードをすべて拾おうとすることは，各ペアの作る区間にカードが存在しないから，可能である．
- $A = (1, 2, 2, 1)$ と並んだカードをすべて拾おうとすることは，区間 1 にカードが 2 枚存在するから，不可能である．
- $A = (1, 2, 1, 2)$ と並んだカードをすべて拾おうとすることは，各区間に存在するカードが 1 枚であるから，可能である．

これをまとめると，拾うペア (区間) を集めた集合 X について，以下のことがわかる．

1. (包含) X の 2 つのペア a, b が，それらのみを取り出すと a, b, b, a の順に並んでいることはない．
2. (交差) X の 2 つのペア a, b が，それらのみを取り出すと a, b, a, b の順に並んでいるものとし，カードの番号をそれぞれ a_1, b_1, a_2, b_2 とする．カード a_1 とカード b_2 の間からはこれ以外のカードを拾うことはできない．さらに，カード a_1, b_1, a_2, b_2 が間にあるようなペアも拾うことができない．したがって，区間 $a \cup b$ は他の区間から独立している．
3. 条件 1. より，区間 a と交差する区間が存在しないならば，区間 a は他の区間から独立している．

したがって，X は，

- X の他の区間と独立な区間 a
- 区間 a, b が交差していて，区間 $a \cup b$ が X の他の区間と独立であるような区間 a, b

を集めたものである．

2　小課題 3 ($N \leqq 9$)

どのカードを拾うかの 2^{2N} 通りを全探索し，ビ太郎の動きをシミュレーションすればよい．計算量は $O(2^{2N} \cdot N)$ 時間である．

3　小課題 4 ($N \leqq 18$)

どのペアを拾うかの 2^N 通りを全探索し，ビ太郎の動きをシミュレーションすればよい．計算量は $O(2^N \cdot N)$ 時間である．

4　小課題 1 ($(A_1, \ldots, A_N) = (1, \ldots, N), N \leqq 5\,000$)

上の考察により，3 つ以上のペアを拾うことができないことがわかる．

1 個または 2 個のペアの選び方 $\frac{N(N+1)}{2}$ 通りを全探索し，それらを拾うことが可能かを判定する．計算量は $O(N^2)$ 時間である．

5　小課題 2 ($(A_1, \ldots, A_N) = (1, \ldots, N)$)

ペア A_i とペア A_j ($N+1 \leqq i < j \leqq 2N$) は，$A_i < A_j$ であるとき同時に拾うことができる．したがって，j を固定したときに選ぶべき i は，$N+1 \leqq i < j$ かつ $A_i < A_j$ を満たす i のなかで V_{A_i} が最大のものである．

j の昇順に走査すると，$\max\{V_{A_i} \mid N+1 \leqq i < j,\ A_i < A_j\}$ を求めることは 1 点更新・区間最大値取得のセグメント木で可能である．計算量は $O(N \log N)$ 時間である．

長さ N の 1 点更新・区間最大値取得のセグメント木 seg を用意する．
$t = N+1, \ldots, 2N$ の順に走査する．各 $N+1 \leqq i \leqq 2N$ について，$i < t$ である間 $seg[A_i] = V_{A_i}$ とする．
(すなわち，$t = i$ のステップが終わるときに $seg[A_i]$ に V_{A_i} を代入する．)
$\max\{V_{A_i} \mid N+1 \leqq i < j,\ A_i < A_j\}$ の値は，$t = j$ であるときの $\max(seg[1 : A_j])$ の値である．

6　小課題 5 ($N \leqq 300$)

dp[カード i まで見た][左手に持ったカード][右手に持ったカード] ＝ (これまでに得られる得点の最大値) の動的計画法を行う．$O(N^3)$ 状態で，遷移が $O(1)$ であるから，計算量は $O(N^3)$ 時間である．DP の更新の方法については，小課題 6 を参考にせよ．

7　小課題 6 ($N \leqq 3000$)

上の DP の [カード i まで見た] の次元をなくし，in-place に行うことを考える．カード i を追加するとき，以下の更新が起こる．

- 各 $1 \leqq y \leqq N$ について，$dp[A_i][y] \leftarrow \left(\max_{1 \leqq x \leqq N} dp[y][x]\right)$
- 各 $1 \leqq y \leqq N$ について，$dp[A_i][y] \leftarrow dp[y][A_i] + V_{A_i}$
- $dp[A_i][A_i] \leftarrow \left(\max_{1 \leqq x \leqq N} dp[A_i][x]\right) + V_{A_i}$

$dp[y][x]$ の配列とともに，$mx[y] = \max_{1 \leqq x \leqq N} dp[y][x]$ の配列を管理することで，カードの追加を $O(N)$ で行うことができる．計算量は $O(N^2)$ 時間である．

8　小課題 7 ($V_i = 1$，$N \leqq 150\,000$)

ペア i の左のカードをカード l_i，右のカードをカード r_i とする．各ペア i に対して，$l_j < l_i < r_j < r_i$ を満たすペア j が存在するならば，そのような l_j の最大値を L_i と定義する．L_i は，1 点変更・区間最大値取得のセグメント木で求めることができる．

長さ $2N$ の 1 点変更・区間最大値取得のセグメント木 seg を用意し，カードを $t = 1, \ldots, 2N$ の順に走査する．
$l_i < t < r_i$ の間，$seg[r_i] = l_i$ とする．それ以外のときは，$seg[r_i] = -\infty$ とする．
このとき，L_i は $t = l_i$ のときの $\max(seg[l_i : r_i])$ の値である．$\max(seg[l_i : r_i]) = -\infty$ ならば，L_i は存在しない．

最初の考察をもとにすると，問題は以下に帰着される．

以下の $2N$ 個程度の区間から，互いに独立になるように区間をいくつか選んだときの，選んだ区間の重みの総和としてあり得る最大値を求めよ．

- 各 $1 \leqq i \leqq N$ について，重み 1 の区間 (l_i, r_i).
- 各 $1 \leqq i \leqq N$ について，重み 2 の区間 (L_i, r_i).

これは，いわゆる「区間スケジューリング問題」を少し発展させたものである．

区間スケジューリング問題では，区間を右端の昇順でソートし，

- 区間 $1, \ldots, i$ から互いに独立になるように区間をいくつか選ぶときの最大個数 x
- x 個の区間を互いに独立になるように選ぶときの，右端の座標の最小値 r_0

を管理する．これを発展させて，

- 区間 $1, \ldots, i$ から互いに独立になるように区間をいくつか選ぶときの最大重み x
- 合計重み x の区間を互いに独立になるように選ぶときの，右端の座標の最小値 r_0
- 合計重み $x - 1$ の区間を互いに独立になるように選ぶときの，右端の座標の最小値 r_{-1}

を管理することで，上の問題を解くことができる．計算量は $O(N \log N)$ 時間である．

重み付き区間スケジューリング問題

また，重み付き区間スケジューリング問題として，以下のように解くこともできる．

長さ $2N$ の 1 点更新・区間最大値取得のセグメント木 dp を用意する．
$dp[t] =$ (カード $1, \ldots, t-1$ からいくつか拾い，カード t を必ず拾うときの得点の最大値) となるように計算する．
区間を右端の昇順でソートし，順に走査する．
重みが w の区間 (l, r) が来たとき，$dp[r] \leftarrow \max(seg[1 : l]) + w$ で更新する．
最終的な $\max(dp)$ が答えである．

9　満点 ($N \leqq 400\,000$)

小課題 7 における，L_i を求める方法と，重み付き区間スケジューリング問題の解法を応用して，以下のように解くことができる．計算量は $O(N \log N)$ 時間である．

長さ $2N$ の 1 点更新・区間最大値取得のセグメント木 $dp1, dp2$ を用意し，$t = 1, \ldots, 2N$ の順に走査する．
$dp1$ は，$dp[t] =$ (カード $1, \ldots, t-1$ からいくつか拾い，カード t を必ず拾うときの得点の最大値) となるように計算する．
$dp2$ は，各ペア (l_i, r_i) について，$l_i < t < r_i$ である間，$dp2[r_i] = \max(dp1[1 : l_i]) + V_i$ とする．それ以外のときは，$dp2[r_i] = -\infty$ とする．
$t = 1, \ldots, 2N$ の順に，$t = r_i$ である区間 (l_i, r_i) があるとき，

- $dp1[r_i] \leftarrow \max(dp1[1 : l_i]) + V_i$
- $dp1[r_i] \leftarrow \max(dp2[l_i : r_i]) + V_i$

で更新する．
最終的な $\max(dp1)$ が答えである．